머 리 말

위대한 령도자 **김정일**장군님께서는 다음과 같이 말씀하시였습니다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

정보산업의 시대, 비상히 빠른 속도로 발전하고있는 과학기술의 시대에 살고있는 우리 청소년들앞에는 현대과학기술을 높은 수준에서 습득하여 최첨단의 요새를 점령하여야 할 어렵고도 중요한 과업이 나서고있습니다.

강성대국건설의 기둥으로 자라나고있는 청소년학생들에게 있어서 높은 과학지식은 조국을 빛내여나가는 길에 귀중한 밑천으로 될것입니다.

특히 수학지식은 누구나가 다 잘 알아야 할 중요한 지식입니다.

이 책은 앞날의 믿음직한 일군으로 자라나기 위하여 수학학습을 열심히 하고있는 학생들에게 도움을 주기 위하여 만들었습니다. 책에서는 중학교에서 취급되는 기하지식을 개괄적으로 주고있습니다.

구체적인 수학지식들과 문제풀이의 묘리들을 원리적으로 파악하며 수학적지능을 키우는데 도움이 되도록 실례와 함께 문제풀이도 많이 주었습니다. 누구든지 이 책의 기하문제만 다 풀면 일반기하학에서 나오는 기하문제들을 쉽게 풀수 있을것입니다.

차 례

제 1 장 평면도형

1. 다각형과 원

1) 직선과 각

① 면, 선, 점

ㄱ) 면, 선, 점

· 면에는 평면과 곡면이 있고 선에는 직선과 곡선이 있다.

· 면과 면이 사귀여 선이 생기고 선과 선이 사귀여 점이 생긴다.

ㄴ) 립체

모양과 크기만을 생각하는 물체를 립체라고 부른다.

립체의 겉은 면, 선, 점으로 되여있다.

ㄷ) 평면도형과 공간도형

도형은 점들의 모임이다. 도형의 모든 점들이 한 평면에 놓일 때 그 도형을 평면도형이라고 부르며 평면도형이 아닌것을 공간도형이라고 부른다.

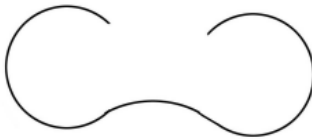
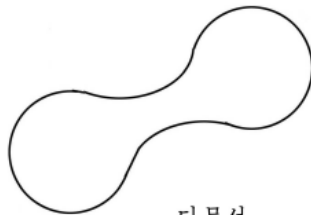



그림 1-1

ㄹ) 벌어진 선과 다문선

길이를 가지는 선들가운데서 끝점을 가진 선을 벌어진 선, 끝점이 없는 선을 다문선이라고 부른다. (그림1－1)

ㅁ) 선과 점의 자리관계

·《점 A가 선 ℓ에 놓여있다.》 또는 《선 ℓ이 점 A를 지난다.》라는것을 다음과 같이 표시한다.

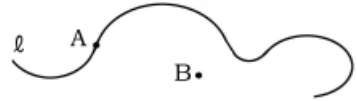
$A \in \ell$ 또는 $\ell \ni A$

그림 1－2

·《점 B가 선 ℓ밖에 있다.》 또는 《선 ℓ이 점 B를 지나지 않는다.》는것을 다음과 같이 표시한다. (그림 1－2)

$B \notin \ell$ 또는 $\ell \not\ni B$

② 직선

ㄱ) 직선

·직선은 량쪽으로 끝없이 곧추 뻗어있는것이라고 생각한다. (이것은 직선에 대한 정의가 아니다. 직선도 기하에서 정의하지 않는 말이다.) 두 점을 지나는 직선은 꼭 1개 있다. 그러므로 두 점은 한 직선을 결정한다고 말한다.

·두 점 A, B를 지나는 직선을 다음과 같이 표시한다.(그림 1－3의 ㄱ, ㄹ)

《직선 AB》(또는 《직선 ℓ》)

·두 직선이 1개의 점만을 함께 가질 때 이것들은 사귄다고 말하며 그 점을 사귐점이라고 부른다.

·직선은 평면을 2개의 부분으로 나누는데 매 부분을 반평면이라고 부른다. 이때 한쪽 반평면의 두 점은 직선과 사귀지 않는 선으로 맺을수 있다. 그러나 서로 다른 두 반평면의 두 점은 어떤 선으로 맺아도 그 선은 반드시 직선 ℓ과 사귄다.

ㄴ) 반직선

·직선에 한 점 A를 찍으면 직선은 두 부분으로 나누어진다. 이때 매개 부분을 반직선이라고 부른다. 그리고 A를 반직선의 끝점이라고 부른다.

·점 A를 끝점으로 하는 반직선을 다음과 같이 표시한다.

《반직선 AB》

여기서 B는 반직선에 있는 다른 한 점이다.(그림 1－3의 ㄴ)

ㄷ) 선분

· 두 끝점을 가진 직선의 토막을 선분이라고 부른다.

· 두 끝점이 A, B인 선분을 다음과 같이 표시한다. (그림 1—3의 ㄷ)

《선분 AB》

· 선분 AB라고 하면 그 길이를 말할 때도 있다.

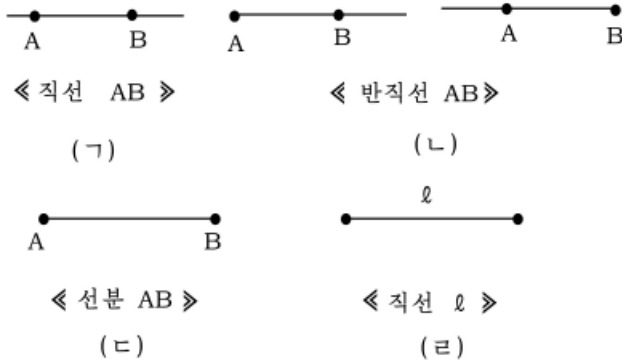



그림 1—3

ㄹ) 선분의 늘임선

두 점 A, B를 지나는 직선을 점 B에서 2개의 반직선으로 나누었을 때 점 A를 포함하지 않는쪽을 선분 AB의 B쪽으로의 늘임선이라고 부르며 A에서 2개의 반직선으로 나누었을 때 점 B를 포함하지 않는쪽을 선분 AB의 A쪽으로의 늘임선이라고 부른다.

ㅁ) 꺾인선(그림 1—4)

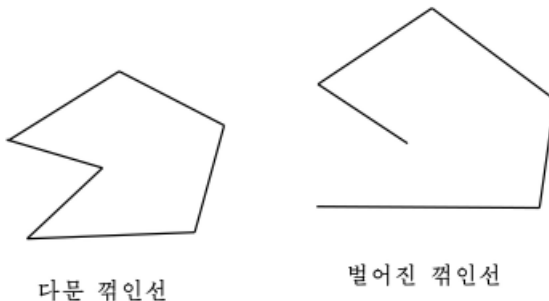



그림 1-4

·한 선분에 몇개의 점을 찍고 그 점들에서 선분을 꺾어서 선분토막들로 된 도형을 만들었을 때 그것을 꺾인선이라고 부른다.

·차〔(정점의 수)－(토막의 수)〕는 다문 꺾인선에서 0과 같고 벌어진 꺾인선에서는 1과 같다.

ㅂ) 두 점사이의 거리

·두 점 A, B를 맺는 선분의 길이를 두 점 A, B 사이의 거리라고 부르고 d(A, B)로 표시한다.

d(A, B)＝AB

·임의의 세 점 A, B, C에 대하여서는 AB＋BC≧AC 이다.

(여기서 갈기표는 B∈AC인 경우에 성립한다.)

ㅅ) 선분의 가운데점

선분을 둘로 꼭같게 나누는 점을 선분의 가운데점이라고 부르며 이때 이 점은 선분을 2등분한다고 말한다.

③ 각

ㄱ) 각

한 점 O에서 나간 두 반직선 OA, OB와 그사이에 끼인 평면의 부분을 각이라고 부르고 ∠AOB로 표시한다. (그림 1－5) ∠AOB라고 하면 그 각의 크기를 말할 때도 있다.

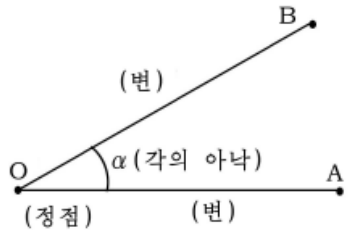



그림 1-5

ㄴ) 여러가지 각들의 이름

· 뾰족각: 0° 보다 크고 90° 보다 작은 각

· 직각: 90° 인 각 (∠R로도 표시한다.)

· 무딘각: 90° 보다 크고 180° 보다 작은 각

· 평각: 180° 인 각

· 오목각: 180° 보다 크고 360° 보다 작은 각

· 한바퀴각: 360° 인 각

ㄷ) 각의 단위

각의 단위에는 1도(1°), 1분(1′), 1초(1″)가 있다.

$1°$ ＝한바퀴각의 $\frac{1}{360}$, $1' = 1°$ 의 $\frac{1}{60}$, $1'' = 1'$ 의 $\frac{1}{60}$

ㄹ) 각의 2등분선

· ∠AOB를 둘로 꼭같게 나누는 직선 OC를 ∠AOB의 2등분선이라고 부른다.

즉 OC가 ∠AOB의 2등분선이면

∠AOC=∠BOC이다.

· 그림 1-6은 각의 2등분선을 긋는 방법을 보여준다.

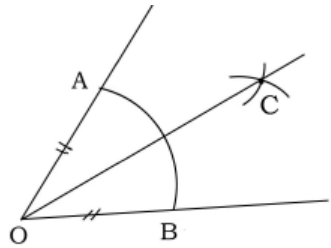



그림 1-6

ㅁ) 보탬각

· $\angle a + \angle b = 2\angle R = 180^\circ$ 일 때 $\angle a$와 $\angle b$를 서로 보탬각이라고 부른다.

· $\angle a$의 한 변과 $\angle b$의 한 변이 겹칠 때 그 두 각을 곁보탬각이라고 부른다.

④ 수직과 평행

ㄱ) 평면에서 두 직선의 자리관계(그림 1-7)

수학상식

홍대용과 《주해수용》

18세기 우리 나라의 수학자, 천문학자, 유물론철학자였던 홍대용(1731-1783년)은 대대로 높은 벼슬을 지낸 량반가문의 출신으로서 대부분을 학문연구에 바쳤다.

그의 뛰여난 재능은 그가 쓴 수학책 《주해수용》에서 찾아볼수 있다. 이 책은 당시까지 도달된 수학지식들을 참고해서 자기의 독자적인 체계를 가지고 씌여져있다.

책은 내편과 외편으로 되여있는데 내편에는 대수, 기하, 삼각 등의 원리적인 문제들을 취급하였고 외편에는 토지면적계산법, 력서편찬과 관련한 천체계산법 등을 비롯하여 여러 분야의 응용문제들을 취급하였다. 특히 내편에서 원의 반경을 알고 그 원에 내접하는 바른14각형과 바른18각형의 변의 길이를 구하는 문제, 고차방정식의 근사풀이법 등을 알기 쉽게 서술한것은 주목할만 한것이다. 그리고 외편에서 지구의 중심으로부터 태양까지 하지날의 거리를 알고 동지날의 거리를 계산하는 문제, 계산기구 또는 도표를 리용하여 여러가지 복잡한 계산을 간편하게 하는 문제 등을 독특하게 푼것은 그의 남다른 재능을 잘 보여준다.

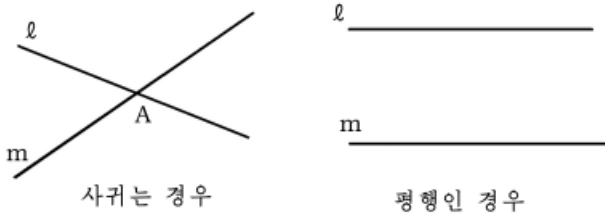



그림 1-7

ㄴ) 맞문각과 그의 성질

· 두 직선이 사귀였을 때 서로 마주하고있는 각을 맞문각이라고 부른다.

· 맞문각은 서로 같다.

ㄷ) 수직선

· 직선 AB와 CD가 직각으로 사귀였을 때 직선 AB와 CD는 서로 수직이라고 말하며 한 직선을 다른 직선의 수직선이라고 부른다.

· 직선 AB와 CD가 수직이라는것을 다음과 같이 표시한다.

$AB \perp CD$

ㄹ) 점에서 직선까지의 거리

점 M에서 직선 ℓ에 그은 수직선이 ℓ과 사귀는 점을 N(이 점을 직

수학상식

수직기호를 도입한 에리곤

17세기 프랑스의 수학자였던 에리곤은 전 6권으로 되여있는 《수학교정》이라는 책을 썼는데 여기에는 산수, 대수가 서술되여있다.

그는 수학기호들을 발전된 형태로 표시하고 사용하였는데 특히 수직기호 ⊥는 그가 1634년에 도입한것이다.

그는 이밖에도 이딸리아의 수학자 따르딸리아(1499−1557년)와 독립적으로 n개의 원소에서 서로 다른 m개의 원소를 취한 조합의 총개수를 구하는 공식을 내놓았다.

선 ℓ에 내린 수직선의 밑점이라고 부른다.)이라고 할 때 선분 MN의 길이를 점 M에서 직선 ℓ까지의 거리라고 부르고 이것을 d(M, ℓ)=MN으로 표시한다.

즉 $d(M, \ell)$

ㅁ) 선분의 수직2등분선

· 선분 AB에서 OA=OB 이고 AB⊥CD 일 때 (O는 선분 AB와 직선 CD의 사귐점) 직선 CD를 선분 AB의 수직2등분선이라고 부른다.

그림 1-8

· 그림 1-8은 선분 AB의 수직2등분선을 긋는 방법을 보여준다.

ㅂ) 평행직선사이의 거리

· 직선밖의 한 점을 지나면서 그 직선에 평행인 직선은 꼭 하나 있다.

· ℓ// m일 때 m의 점들에서 직선 ℓ까지의 거리는 다 같다.

이 거리를 두 평행직선 ℓ, m사이의 거리라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

즉 d(m, ℓ)

ㅅ) 평행직선과 같은자리각, 엇각, 한쪽 아낙각

그림 1-9

· 그림 1-9에서 ∠2와 ∠6은 비슷한 자리에 있다.

즉 변 ME와 NE가 직선 EF에서 같은쪽으로 향하고 다른 한 쌍의 변 MB와 ND는 직선 EF에 관하여 같은쪽에 있다.

이러한 두 각을 같은자리각이라고 부른다.

· ∠3과 ∠6은 직선 EF에 관하여 다른쪽 아낙에 있다.

이런 두 각을 엇각이라고 부른다.

· ∠3과 ∠5는 직선 EF에 관하여 같은쪽 아낙에 있다.

이런 두 각을 한쪽아낙각이라고 부른다.

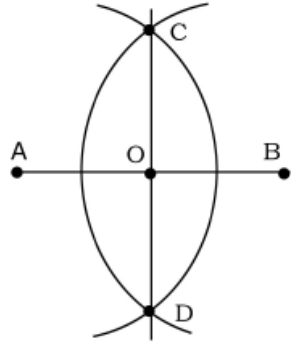
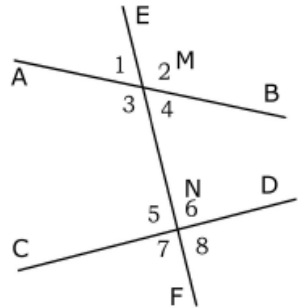
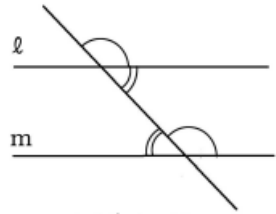
· 그림 1-10에서와 같이

두 직선이 평행 ⇔ 같은 자리각이 같다.
두 직선이 평행 ⇔ 엇각이 같다.
두 직선이 평행 ⇔ 한쪽아낙각의 합이 180°이다.

그림 1-10

ㅇ) 평행각과 수직각

·두 각에서 변들이 한쌍씩 평행일 때 그 두 각을 평행각이라고 부른다. 평행각은 크기가 같거나 서로 보탬각이다.

·두 각에서 변들이 한쌍씩 수직일 때 그 두 각을 수직각이라고 부른다. 수직각은 크기가 서로 같거나 서로 보탬각이다.

2) 문제풀이의 묘리

[례1] 한 직선우에 세 점 A, B, C가 이 순서로 놓이고 AB>BC이다. AB의 가운데점을 L, AC의 가운데점을 M, BC의 가운데점을 N이라고 하면 MN=LB이다. 왜 그런가? (그림 1−11)

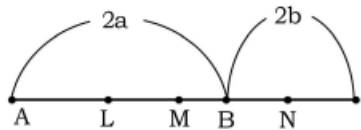
(설명) AB=$2a$, BC=$2b$로 놓으면

$$LB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}2a=a$$

$$NC=\frac{1}{2}BC=2\frac{1}{2}b=b$$

$$MC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(AB+BC)=\frac{1}{2}(2a+2b)=a+b$$

$$MN=MC-NC=a+b-b=a$$

$$\therefore\ MN=LB$$

2a 2b
A L M B N
그림 1-11

[례2] 네 점 A, B, C, D가 차례로 한 직선우에 있을 때 AB·CD+BC·AD=AC·BD 이다. 왜 그런가? (그림 1−12)

(설명) AB=a, BC=b, CD=c 로 놓으면

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=a\cdot c+b(a+b+c)=$$

$$=(a+b)c+b(a+b)=(a+b)(b+c)=AC\cdot BD$$

※ 이 문제는 《오일레르의 정리》로 불리우고있다.

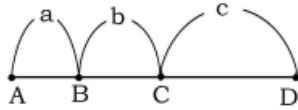



그림 1－12

[례3] 45° 각으로 사귀는 두 평면거울 AB, BC가 있다. 그림 1－13에서와 같이 빛 MN이 AB에 70° 각으로 입사하고 N에서 반사되여 그 반사빛이 다시 BC에 있는 P에서 반사되여 PQ방향으로 반사될 때 PQ와 MN이 이루는 각은 얼마인가?

또한 ∠MNA가 α (여기서 $45° < \alpha < 90°$)일 때는 어떻게 되는가? (그림 1－13)

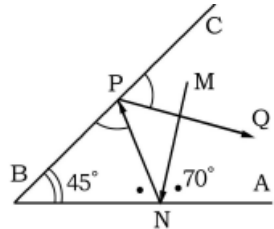



그림 1－13

(설명) 입사각과 반사각이 같으므로

$\angle MNP = 180° - 70° \times 2 = 40°$

한편 3각형의 세 아낙각의 합이 180°이므로

$\angle BPN = 180° - 70° - 45° = 65°$

$\therefore \angle QPN = 180° - 65° \times 2 = 50°$

$\angle QPN + \angle MNP = 50° + 40° = 90°$

3각형의 두 아낙각의 합이 90°이면 다른 한 각은 90°이므로 $PQ \perp MN$이다. 일반적으로 $\angle MNA = \alpha$일 때에도 $PQ \perp MN$임을 얻는다.

련습문제

1. 그림 1－14에서 직선, 반직선, 선분이 사귀는것은 ( )이다.

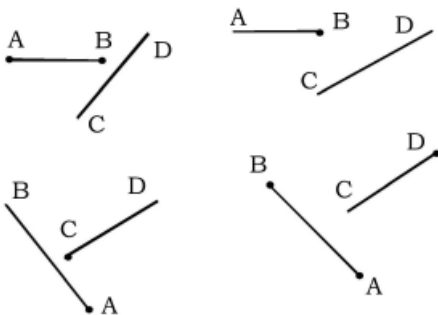



그림 1－14

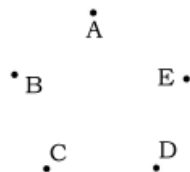



그림 1－15

2. 그림 1－15의 매 점을 끝점으로 하고 다른 한 점을 지나는 반직선은 ( )개이다.

① 5 ② 10 ③ 20 ④ 우의 답은 모두 틀림

3. 그림 1－16에서 세 직선의 사귐점들을 각각 끝점으로 하는 반직선은 ( )개이다.

① 5 ② 10 ③ 20 ④ 우의 답은 모두 틀림

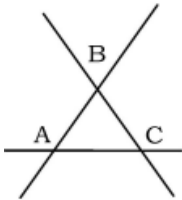



그림 1－16

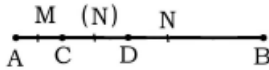



그림 1－17

4. 그림 1－17에서 AB＝14, AC∶CD∶DB＝1∶2∶4, AM＝$\frac{1}{2}$AC, DN＝$\frac{1}{4}$DB이면 MN의 길이는 ( )이다.

① 4 또는 7 ② 7 ③ 3 또는 7 ④ 우의 답은 모두 틀림

5. 그림 1－18에서 AB＝2BC, DA＝$\frac{3}{2}$AB, M은 AD의 가운데점, N은 AC의 가운데점이다. 이때 MN과 AB＋NB의 자리관계는 ( )이다.

① MN＞AB＋NB ② MN＜AB＋NB

③ MN＝AB＋NB ④ 정할수 없다.

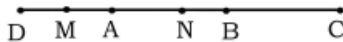



그림 1－18

6. ∠A와 어떤 각의 합은 90°이다. 이 ∠A는 그 각의 ( )이다.

① 보탬각 ② 이웃보탬각 ③ 이웃각 ④ 남은각

7. 무딘각에서 뾰족각을 던 차는 ( )이다.

① 뾰족각 ② 직각 ③ 무딘각 ④ 정할수 없다.

8. 평면우에 한 직선에 놓이지 않는 네 점이 있다. 그가운데 임의의 두 점은 한 직선을 결정한다. 이때 직선을 기껏 _____개 그을수 있다.

9. 평면에 둘씩 서로 사귀는 3개의 직선이 있다. 만일 사귐점이 최대로 m개, 최소로 n개이면 $m+n=$_______개이다.

10. 그림 1－19에서 뾰족각은 ______ 개이다.

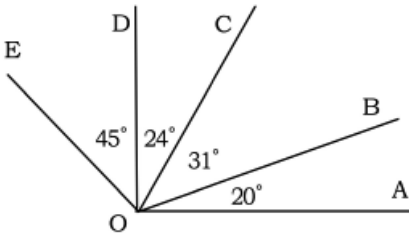



그림 1－19

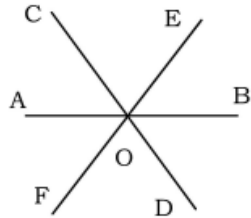



그림 1－20

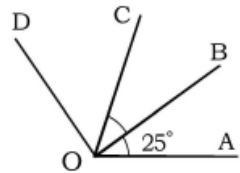
11. 그림 1－20과 같이 세 직선 AB, CD, EF가 한 점 O에서 사귄다. 이때 그림에는 평각보다 작은 각은 ______ 개 있다.

12. 한 뾰족각의 남은각이 그 뾰족각의 보탬각의 $\frac{1}{3}$이다.

이때 그 뾰족각의 크기는 ______ 이다.

그림 1－21

13. 그림 1－21에서 $\angle AOB=25^{\circ}$ 이고 OB는 $\angle AOC$의 2등분선이며 $\angle BOC$와 $\angle AOD$는 서로 보탬각이다.

그러면 $\angle COD$는 _____이다.

14. 5시 15분일 때 시침과 분침사이의 뾰족각은 _____이다.

15. 세 직선이 둘씩 사귈 때 사귐점이 1개가 아니면 맞문각은 _____쌍

이다.

답

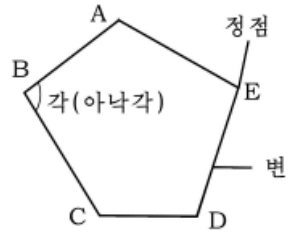
1. ④ 2. ③ 3. ③ 4. ③ 5. ① 6. ④
7. ④ 8. 6 9. 4 10. 8 11. 12 12. 45°
13. 105° 14. $67^\circ 30'$ 15. 6

3) 3각형

그림 1—22

① 다각형과 그 요소

ㄱ) 다각형

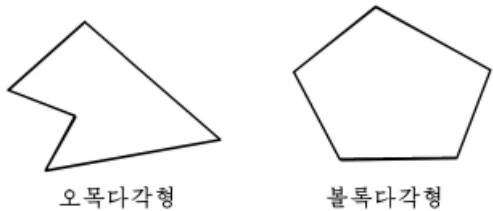
다문꺾인선과 그 아낙으로 된 평면의 부분을 다각형이라고 부른다. 이때 다각형을 이루는 매개 선분을 다각형의 변, 이웃한 두 변의 공통 점을 다각형의 정점, 이웃한 두 변이 만드는 다각형의 아낙부분의 각을 다각형의 각(아낙각)이라고 부른다. (그림1—22)

정점이 A, B, C, D, …, E인 다각형을 《다각형 ABCD…E》로 표시한다.

다각형을 이루는 다문꺾인선을 다각형의 둘레라고 부른다.

ㄴ) 다각형의 분류

그림 1—23

다각형은 변의 개수에 따라서 3각형, 4각형, 5각형, …이라고 부른다.

특히 3각형 ABC를 △ABC로 표시한다.

다각형안의 임의의 두 점을 맺는 선분이 그 다각형안에 완전히 놓일 때 그 다각형을 볼록다각형이라고 부르며 볼록다각형이 아닌 다각형을 오목다각형이라고 부른다. (그림 1—23)

변의 길이가 꼭같고 아낙각들이 꼭같은 다각형을 바른다각형이라고

부른다.

② 3각형의 변, 각들사이의 관계

ㄱ) 3각형에서 변들사이의 관계

3각형에서 한 변은 다른 두 변의 합보다 작고 차보다 크다.

즉 △ABC에서 $BC-CA < AB < BC+CA$

$CA-AB < BC < CA+AB$

$AB-BC < CA < AB+BC$

ㄴ) 3각형의 세 각의 합

3각형의 세 각의 합은 180°이다.

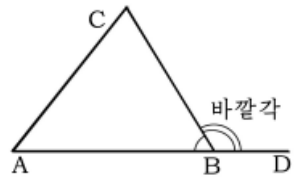
즉 △ABC에서 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

ㄷ) 3각형의 바깥각

△ABC에서 변 AB를 연장하여 생기는 ∠CBD를 아낙각 B의 바깥각이라고 부른다. (그림 1−24)

그림 1−24

3각형에서 바깥각은 그곁에 있지 않는 두 아낙각의 합과 같다.

$\angle CBD=\angle A+\angle C$

③ 3각형의 결정조건

ㄱ) 3각형의 요소

3각형에서 3개의 변, 3개의 각들을 각각 3각형의 요소라고 부른다.

ㄴ) 3각형의 결정조건

3각형은 다음의 요소가 주어질 때 하나로 정해진다.

세 변(매 두 변의 합은 다른 한 변보다 크다.)

두 변과 그사이의 각

한 변과 그에 붙은 두 각(두 각의 합은 180°보다 작다.)

④ 3각형의 변과 각의 관계

3각형에서 큰 변의 맞은각은 작은 변의 맞은각보다 크다.

또한 큰 각의 맞은변은 작은 각의 맞은변보다 크다.

⑤ 3각형의 높이, 가운데선

ㄱ) 3각형의 높이

3각형의 한 정점에서 맞은변 또는 그 연장선에 그은 수직선분을 그 3각형의 높이라고 부른다. (그림 1—25)

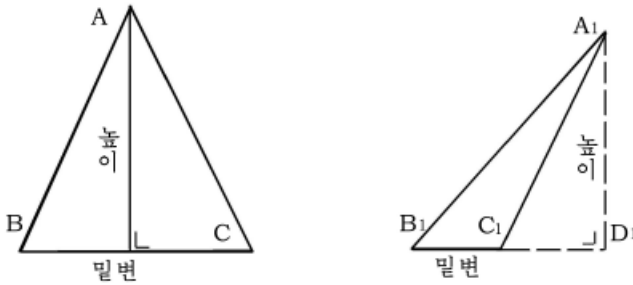



그림 1—25

ㄴ) 3각형의 가운데선

3각형의 한 정점과 그 맞은변의 가운데점을 맺는 선분을 3각형의 가운데선이라고 부른다.

3각형의 세 가운데선은 한 점에서 사귀며 그 사귐점은 매 가운데선을 2:1로 나눈다.

3각형의 세 가운데선의 사귐점을 3각형의 무게중심이라고 부른다.

⑥ 여러가지 3각형

ㄱ) 2등변3각형

두 변이 같은 3각형을 2등변3각형이라고 부른다.

이때 같은 두 변을 옆변, 두 옆변사이의 각을 정각, 정각의 맞은변을 밑변, 밑변에 붙은 두 아낙각을 밑각이라고 부른다.

2등변3각형에서는 정각의 2등분선, 높이, 가운데선이 다 일치한다.

2등변3각형의 두 밑각은 같다.

거꾸로 두 각이 같은 3각형은 2등변3각형이다.

ㄴ) 바른3각형

세 변이 같은 3각형을 바른3각형이라고 부른다.

바른3각형의 세 각은 다 같다.

또한 세 각이 다 같은 3각형을 바른3각형이라고 부른다.

ㄷ) 직3각형

3각형에서 세 각이 다 뾰족각이면 뾰족3각형, 한 각이 직각이면 직3각형, 한 각이 무딘각이면 무딘3각형이라고 부른다.

직3각형에서 두 뾰족각의 합은 90°이다.

직3각형에서 직각을 끼고있는 두 변을 직각변, 직각의 맞은변을 빗변이라고 부른다. 직3각형에서 빗변은 직각변보다 길다. 직3각형에서 빗변의 2제곱은 직각변들의 2제곱의 합과 같다.

즉 △ABC(∠A=90°)에서 $BC^2 = AB^2 + AC^2$

ㄹ) 직2등변3각형

두 직각변의 길이가 같은 직3각형을 직2등변3각형이라고 부른다.

직2등변3각형은 직3각형이면서 2등변3각형이다.

⑦ 3각형의 면적공식

3각형의 면적은 밑변과 높이와의 적의 절반과 같다.

S= $\frac{1}{2}a$h (*a*: 밑변, h:높이)

⑧ 3각형의 합동조건

ㄱ) 합동

·두 도형이 꼭 맞출수 있게 생겼을 때 그 두 도형은 합동이라고 말한다.

합동인 두 도형을 꼭 맞출 때 겹쳐지는 두 점, 두 변, 두 각을 각각 대응하는 점, 대응하는 변, 대응하는 각이라고 부른다.

·합동인 두 도형에서 대응하는 선분의 길이는 같고 대응하는 각의 크기도 같다.

△ABC와 △$A_1B_1C_1$가 합동이라는것을 다음과 같이 쓴다.

△ABC≡△$A_1B_1C_1$

ㄴ) 3각형의 합동조건

·두 3각형에서 세 쌍의 대응하는 변이 각각 같으면 그 두 3각형은 합동이다. (세변조건)

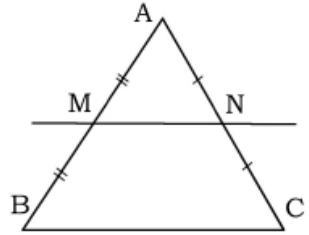
·두 3각형에서 두 쌍의 대응하는 변과 그사이의 각이 각각 같으면 두 3각형은 합동이다. (변각변조건)

·두 3각형에서 한 쌍의 대응하는 변과 그 변에 붙은 두 쌍의 대응하는 각이 각각 같으면 그 두 3각형은 합동이다. (각변각조건)

ㄷ) 직3각형의 합동조건

·두 직3각형에서 두 쌍의 대응하는 직각변이 각각 같으면 그 두 직3각형은 합동이다.

·두 직3각형에서 한 쌍의 대응하는 변과 한 쌍의 대응하는 각이 각각 같으면 그 두 직3각형은 합동이다.

·두 직3각형에서 대응하는 빗변과 한 쌍의 대응하는 직각변이 각각 같으면 그 두 직3각형은 합동이다.

⑨ 3각형의 중간선

3각형의 두 변의 가운데점을 맺는 선분을 3각형의 중간선이라고 부른다.

3각형의 중간선은 밑변에 평행이며 그의 절반과 같다.

그림 1-26

즉 그림 1－26에서 MN이 3각형의 중간선일 때 $MN = /\!/ \frac{1}{2} BC$

4) 문제풀이의 묘리

[례1] △ABC에서 ∠B는 ∠A보다 40° 크고 ∠C는 ∠B보다 50° 작다. ∠A의 크기를 구하여라.

(설명) $\angle A = x^\circ$라고 하면 주어진 조건에 의하여

$\angle B = x^\circ + 40^\circ,\ \angle C = (x^\circ + 40^\circ) - 50^\circ = x - 10^\circ$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$이므로

$x^\circ(x^\circ + 40^\circ) + (x^\circ - 10^\circ) = 180^\circ$

$3x^\circ = 150^\circ, \qquad x^\circ = 50^\circ$ 　　답 50°

[례2] △ABC에서 AB ＞AC이며 변 BC의 가운데점을 M이라고 할 때 다음것을 증명하여라.

1) AB＋AC＞ 2AM　　2)∠BAM ＜CAM

(설명) 1) AM의 연장선우에 MD＝AM으로 되는 점 D를 찍고 D를 B 및 C와 맺자. (그림

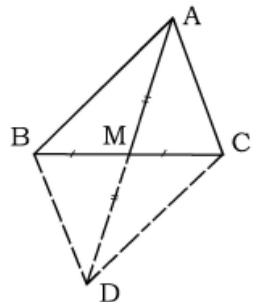



그림 1-27

1－27)

△BDM과 △AMC에서 BM＝MC, DM＝AM,

∠BMD＝∠AMC (맞문각)

∴ △BDM＝△AMC (변각변조건)

즉 BD＝AC

△ABD에서

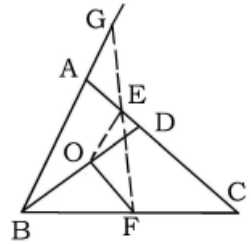
AB＋BD＞AD이므로 AB＋AC＞2AM

2) △ABD에서 AB＞BD＝AC이므로 ∠ADB＞∠BAD＝∠BAM

여기서 BD//AC로부터 ∠ADB＝∠CAD＝∠CAM이므로

∠CAM＞∠BAM

그림 1－28

[례3] AB＜AC인 △ABC의 변 AC우에 점 D를 DC＝AB되게 찍고 AD의 가운데점을 E, BC의 가운데점을 F라고 하자. F, E를 맺는 직선이 BA의 늘임선과 사귀는 점을 G라고 하면 AE＝AG임을 증명하여라.

(설명) B와 D를 맺고 그가운데점을 O라고 하면 (그림 1－28)

$2OE \underline{\underline{//}} AB = CD \underline{\underline{//}} 2OF$ (3각형의 중간선에 관한 성질)

∴ OE＝OF, ∠OEF＝∠OFE

OE//AB, OF//AC이므로

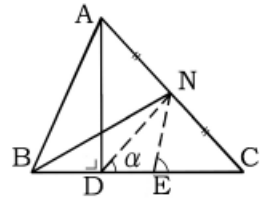
∠OEF＝∠AGE (평행직선의 같은자리각)

∠OFE ＝∠AEG (평행직선의 같은자리각)

△AGE는 2등변3각형이다.

∴ AG＝AE

그림 1－29

[례4] ∠B＝2∠C인 △ABC에서 A로부터 BC에 내린 수직선의 밑점을 D라고 하고 BC의 가운데점을 E라고 하면 AB = 2DE임을 증명하여라.

(설명) 변 AC의 가운데점 N을 D 및 E와 맺고 ∠C＝α라고 하면 ∠B＝2α이다. (그림 1－29)

△ADC는 직3각형이고 N은 그 빗변의 가운데점이므로 ND = NC

∴ ∠NDC $=\alpha$

또한 NE는 △ABC의 중간선이므로 NE//AB

∴ NEC $=2\alpha$, NE$=\frac{1}{2}$BC

여기서 △NDE의 바깥각 ∠NEC는 2α이므로 ∠DNE$=\alpha$

∴ DE$=$EN$=\frac{1}{2}$AB 즉 AB$=$2DE

[례5] 2등변3각형 ABC의 밑변의 두 끝점 B, C로부터 맞은변에 그은 수직선의 밑점을 각각 D, E라고 하면 BD=CE임을 증명하여라.

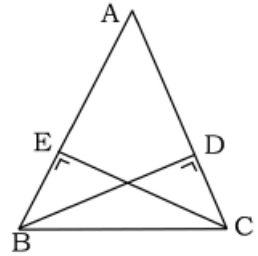
그림 1-30

(설명) △DBC와 △EBC에서 AB=AC이므로 (그림 1-30)

∠DCB=∠EBC

또한 ∠BDC=∠CEB=∠R,

CB는 공통변이므로 △DBC≡△EBC (직3각형의 합동조건)

∴ BD=CE

련습문제

1. 다음의 매 3개의 선분에 대하여 3각형을 결정하는것은 ( )이다.

① 2. 5, 3. 7, 6. 1 ② 3, 8, 12

③ 4, 1. 7, 2. 3 ④ 1, 2, 3. 1

2. 3각형의 세 아낙각의 비가 1:2:3이면 이 3각형은 ( )이다.

① 뾰족3각형 ② 직3각형 ③ 무딘3각형 ④ 정할수 없다.

3. △ABC에서 ∠B, ∠C의 2등분선의 사귐점을 C라고 하면 ∠BFC는 ( )이다.

① ∠R보다 작다. ② ∠R보다 크다.

③ ∠R이다. ④ ∠R보다 크거나 같다.

4. 3각형에서 제일 큰 각이 제일 작은 각의 2배이면 제일 작은 각

은 ( )이다.

① 60°를 넘지 않는다. ② 30°를 넘지 않는다.

③ 36°보다 작지 않고 45°보다 크지 않다.

④ 우의 답은 모두 틀림

5. 3각형의 제일 큰 각이 제일 작은 각의 100배이면 이 3각형은 ( )이다.

① 무딘3각형 ② 직3각형 또는 무딘3각형

③ 뾰족3각형 ④ 정할수 없다.

6. △ABC에서 BC의 가운데점을 D라고 할 때 ∠BAD와 ∠CAD의 크기관계는 ______이다.

7. 빗변의 길이가 2C, 한 직각변의 길이가 C인 직3각형의 세 아낙각의 비는 _____이다.

8. 4각형 ABCD에서 AB=5, CD=DA=AC=10, ∠B=90°이면 ∠BAD와 ∠BCD의 크기는 각각 ________이다.

9. 직3각형 ABC에서 ∠C=90°이고 ∠A의 2등분선이 BC와 사귀는 점을 D라고 할 때 AB=2AC, BD=2㎝라면 CD의 길이는 ____ 이다.

10. △ABC에서 ∠B, ∠C의 2등분선의 사귐점을 I, I를 지나 AB, AC에 평행되게 그은 직선이 BC와 사귀는 점을 각각 E, F라고 할 때 BC=8cm이면 △IEF의 둘레는 ______이다.

11. △ABC에서 ∠C≦∠B≦∠A≦90°일 때 ∠B와 45°의 크기를 비교하여라.

12. △ABC의 변 AB, AC의 바깥쪽에 바른4각형 ABDE, ACFG를 만들고 EG의 가운데점을 L, BC의 가운데점을 M이라고 하면 AN=EL, AM⊥EG임을 증명하여라.

13. △ABC의 변 AC의 가운데점을 M, BM의 가운데점을 N, AN과 BC와의 사귐점을 P라고 하면 BP$=\frac{1}{2}$CP임을 증명하여라.

14. △ABC의 ∠A의 2등분선에 B, C로부터 내린 수직선의 밑점을 D, E라고 하고 BC의 가운데점을 M이라고 하면
MD＝ME$=\frac{1}{2}$ ｜AB－AC｜ 임을 증명하여라.

15. △ABC에서 AC＝3AB이다. 이제 C로부터 ∠A의 2등분선에 내린 수직선의 밑점을 D라고 하면 BC는 AD를 2등분한다는것을 증명하여라.

16. △ABC의 변 BC의 가운데점 D로부터 ∠A의 2등분선에 평행으로 그은 직선이 변 BA, CA(또는 늘임선)와 사귀는 점을 E, F라고 하면 AE=AF$=\frac{1}{2}$ ｜AB−AC｜, BE=CF$=\frac{1}{2}$(AB+AC) 임을 증명하여라.

17. △ABC의 바깥쪽에 바른3각형 DBC를 만들면 AD≦AB＋AC임을 증명하여라.

18. △ABC아낙의 임의의 한 점을 P라고 할 때 다음것을 증명하여라.
① AB＋AC ＞ PB＋PC ② ∠BPC ＞ ∠BAC

19. △ABC아낙의 임의의 한 점을 P, BP, CP의 늘임선이 각각 AC, AB와 사귀는 점을 D, E라고 하면 AE＋AD＞PE＋PD임을 증명하여라.

20. 2등변3각형 ABC(AB＝AC)의 변 AB우에 점 D를, 변 AC의 늘임선우에 점 E를 BD＝CE되게 정하면 DE ＞ BC임을 증명하여라.

21. 바른3각형 ABC가 있다. 이 평면우의 임의의 한 점을 P라고 할 때 늘 PB＋PC ≧ PA임을 증명하여라.

22. 직2등변3각형 ABC의 빗변 BC우의 임의의 한 점 D로부터 AB, AC에 내린 수직선의 밑점을 각각 E, F라고 할 때 D로부터 EF에 내린 수직선은 늘 일정한 점을 지난다는것을 증명하여라.

답

1. ①　2. ②　3. ②　4. ②　5. ③

6. ∠BAD ＜ ∠CAD　7. 1∶2∶3　8. 120°, 90°

9. 1㎝　10. 8㎝

11. ∠B≧45°

지시: 만일 ∠B ＜ 45°이면 ∠A ＞ 90°를 얻게 되는데 이것은 조건에 모순된다.

12. 지시: AL의 늘임선우에 LK＝LA되게 점 K를 정하면 △EAK≡△ABC, △EAL≡△ABM으로 된다. 또한 MA와 EG의 사귐점을 H라고 하면 우의 결과와 조건으로부터 ∠AHE＝∠R를 얻는다.

13. 지시: 점 M을 지나 AP에 평행인 직선이 BC와 사귀는 점을 Q라고 하고 BP＝PQ＝QC임을 밝힌다.

14. 지시: AB ＞ AC인 경우에 BD, CE의 늘임선이 AC의 늘임선, AB와 사귀는 점을 각각 G, F라고 하고 3각형의 중간선에 관한 성질을 적용한다. AB ＜ AC인 경우에도 방법은 같다.

15. 지시: CD의 늘임선이 AB의 늘임선과 사귀는 점을 E라고 하면 △ADC≡△ADE로 된다.

16. 지시: 먼저 AE＝AF임을 밝힌다. 다음에 C에서 ∠A의 2등분선에 그은 수직선의 밑점을 P, CP의 늘임선이 AB와 사귀는 점을 Q라고 할 때 AE＝DP임을 밝히고 △BCQ에서 3각형의 중간선에 관한 성질을 적용한다.

17. 지시: △ABC의 바깥쪽에 바른3각형 ACE를 만들고 △CAD≡△CEB임을 밝힌다.

18. 지시: BP의 늘임선이 AC와 사귀는 점을 D라고 할 때 △ABD에서 AB+AD>BD이고 △PCD에서 PD+DC>PC로 된다.

19. 지시: 평행4변형 EPDQ를 만들면 Q는 △AED아낙에 있게 된다.

20. 지시: DE와 BC의 사귐점을 P라고 한다. 평행4변형 EDBF를 만들고 BF>BC임을 밝힌다.

21. 지시: C를 중심으로 하여 변 AC가 변 BC에 겹칠 때까지 △PAC를 돌렸을 때 정점 P가 놓이는 점을 Q라고 하면 △CPQ는 바른3각형이 된다.

22. 지시: D로부터 EF에 내린 수직선의 밑점을 G, 직선 GD와 A로부터 BC에 내린 수직선과의 사귐점을 H라고 하면 점 H가 일정한 점이다.

5) 4각형

① 4각형의 아낙각의 합

· 4각형의 네 각의 합은 360°이다.

· n각형의 아낙각들의 총합은 다음과 같다.

$$(n-2)\times 180^\circ$$

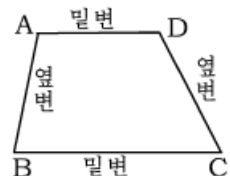
② 제형

ㄱ) 제형

· 한 쌍의 맞은변이 서로 평행인 4각형을 제형이라고 부른다.

이때 평행인 두 변을 밑변, 나머지 두 변을 옆변이라고 부른다. (그림 1−31)

그림 1−31

· 제형에서 한 옆변에 붙은 두 각은 서로 보탬각이다.

ㄴ) 바른제형

· 밑변에 붙은 두 각이 꼭같은 제형을 바른제형이라고 부른다.

· 바른제형에서 두 옆변은 같다.

③ 평행4변형

ㄱ) 평행4변형

두 쌍의 맞은변이 각각 서로 평행인 4각형을 평행4변형이라고 부른다. 평행4변형 ABCD를 간단히 ◇ABCD로 표시한다.

ㄴ) 평행4변형의 성질

· 두 쌍의 맞은변은 각각 서로 같다

· 두 쌍의 맞은각은 각각 서로 같다.

· 두 대각선은 서로 다른것을 2등분한다.

ㄷ) 평행4변형이 될 조건

· 두 쌍의 맞은변이 각각 서로 평행일 때

· 두 쌍의 맞은변이 각각 서로 같을 때

· 두 쌍의 맞은각이 각각 서로 같을 때

· 두 대각선이 서로 다른것을 2등분할 때

· 한 쌍의 맞은변이 평행이고 같을 때

④ 등변4각형

· 네 변이 다 같은 4각형을 등변4각형이라고 부른다.

· 등변4각형의 두 대각선은 서로 2등분한다.

⑤ 직4각형

· 네 각이 다 직각인 평행4변형을 직4각형이라고 부른다.

· 직4각형의 두 대각선은 서로 같다.

⑥ 바른4각형

· 네 변의 길이가 다 같은 직4각형을 바른4각형이라고 부른다.

· 바른4각형의 두 대각선은 같고 서로 수직2등분한다.

⑦ 바른다각형

변들이 다 같고 각들이 다 같은 다각형을 바른4각형이라고 부른다.

⑧ 4각형의 면적

ㄱ) 직4각형

직4각형의 면적은 두 이웃변의 길이를 곱한 적과 같다.

$S = a \cdot b$

ㄴ) 평행4변형

· 평행4변형에서 평행인 두 변 또는 그 연장선사이의 거리를 평행4변형의 높이라고 부른다.

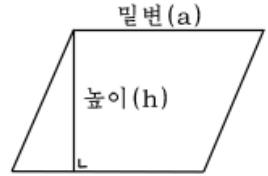



그림 1—32

이때 평행인 그 두 변을 밑변이라고 부른다. (그림 1—32)

· 평행4변형의 면적은 밑변과 높이와의 적과 같다.

즉　$S = ah$

ㄷ) 제형

· 제형에서 두 밑변 또는 그 연장선사이의 거리를 제형의 높이라고 부른다.

· 제형의 면적은 두 밑변의 합과 높이와의 적의 절반과 같다.

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h$$

⑨ 제형의 중간선

· 제형에서 두 옆변의 가운데점을 맺는 선분을 제형의 중간선이라고 부른다.

· 제형의 중간선은 밑변에 평행이며 두 밑변의 합의 절반과 같다.

6) 문제풀이의 묘리

[례1] 4각형 ABCD의 변 AB의 가운데점을 M, 다른 변우의 한 점을 P라고 하면 $2PM < BC + CD + DA$임을 증명하여라.

(설명) 1) 점 P가 BC우에 있을 때 PM은 △APB의 가운데선이므로

$2PN < AP + BP$

그림 1−33

또한 4각형의 한 변은 나머지 변들의 합보다 작다는데로부터 $AP < PC + CD + DA$

$\therefore \quad 2PM < BP + PC + CD + DA = BC + CD + DA$

2) 점 P′가 CD우에 있을 때 $BP' < BC + CP$, $AP' < PD + DA$ 이므로

$2PM < AP + BP < BC + CP + PD + DA = BC + CD + DA$

P가 DA우에 있는 경우는 1)의 경우와 마찬가지로 증명한다.

그림 1−34

[례2] 4각형 ABCD에서 ∠ACB, ∠ADB의 2등분선을 긋고 그 사귐점을 E라고 하면 ∠CED는 ∠CAD와 ∠CBD의 합의 절반과 같다는것을 증명하여라.

(설명) (그림1−34)

$\angle ADE = \angle EDP = \alpha$, $\angle ACE = \angle ECB = \beta$, $\angle DEC = x$로 놓자.

∠DPC는 △ADP, △BCP의 바깥각이므로

$\angle CAD + 2\alpha = \angle CBD + 2\beta = \angle DPC$ ①

한편 오목4각형 ECPD에서 $\angle DPC = x + \alpha + \beta$ ②

①, ②로부터

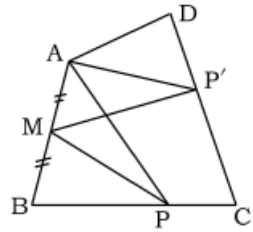
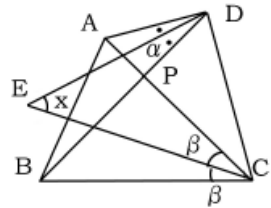
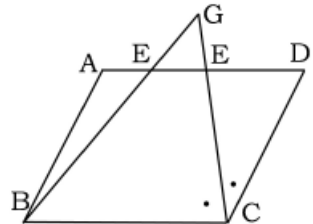
$2DPC = \angle CAD + \angle CBD + 2(\alpha + \beta) = 2x + 2(\alpha + \beta)$

$\therefore \ 2x = \angle CAD + \angle CBD$

즉 $x = \dfrac{1}{2}(\angle CAD + \angle CBD)$

[례3] 한 평행4변형의 두 이웃한 변은 8㎝, 3㎝이다. 이 평행4변형의 큰 변에 붙어있는 두 각의 2등분선은 그에 대한 변을 3개의 부분으로 나눈다. 각 부분의 길이를 구하여라.

그림 1−35

(설명) 그림 1−35의 ◇ABCD에서 AB=3㎝, BC=8㎝라고 하고 ∠B와 ∠C의 2등분

선이 변 AD와 사귀는 점을 각각 E, F라고 하면

$\angle AEB = \angle EBC$ (평행직선의 엇각)

$\angle EBC = \angle ABE$ (조건)

$\therefore$ $\angle AEB = \angle ABE$

즉 AE=AB=3㎝

마찬가지로 DF=DC=3㎝임을 알수 있다.

$\therefore$ EF=8−3·2=2㎝

련습문제

1. 볼록다각형의 아낙각의 합이 1 440°이면 이 다각형의 변의 개수는 ( )이다.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12

2. 볼록다각형의 아낙각에서 뾰족각은 ( )개보다 많을수 없다.

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

3. 볼록다각형의 n개의 아낙각과 한 바깥각의 합은 1 350°이다.

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10

4. 평행4변형에서 두 대각선과 변들에 의하여 생기는 3각형들가운데 합동인 3각형은 ( )쌍 있다.

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8

5. 직4각형의 두 변의 길이가 15, 25이고 한 아낙각의 2등분선의 길이를 두 부분으로 나눈다. 이때 이 두 부분의 길이는 각각 ( )이다.

① 12.5, 12.5 ② 15, 10 ③ 16, 9 ④ 18, 7

6. 그림 1−36에서와 같이 2개의 변의 길이가 1인 바른4각형 ABCD와 PQRS가 있다. 만일 점 P가 바른4각형 ABCD의 두 대각선의 사귐점 O와 일치하는 경우에 두 바른4각형의 겹친 부분의 면적은 ( )이다.

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{6}$

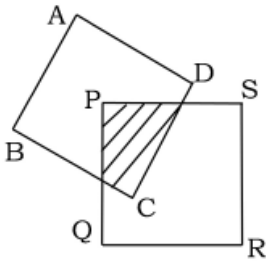



그림 1－36

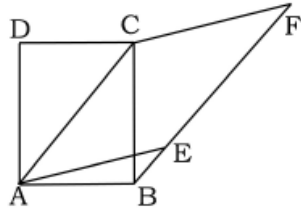



그림 1－37

7. 그림 1－38에서 4각형 AEFC는 등변4각형이다.
이때 ∠ACF의 크기는 ∠F의 크기의 ( )이다.
① 4배 ② 5배 ③ 6배 ④ 7배

8. 그림 1－39의 4각형 ABCD에서 AC＝BC이고 점 M, N은 각각 AD, BC의 가운데점이다. 이때 그림의 △EFG는 ( )이다.
① 바른3각형, ② 직3각형
③ 2등변3각형 ④ 직2등변3각형

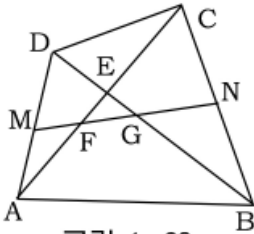



그림 1－38

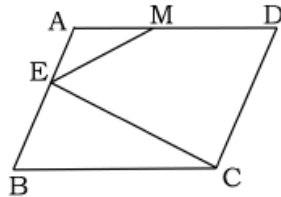



그림 1－39

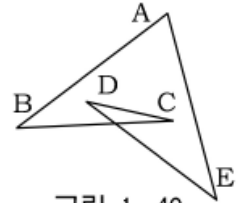
9. 그림 1－39의 ◇ABCD에서 BC＝2AB이고 M은 AD의 가운데점이다. 이때 ∠EMD는 ∠AEM의 ( )배이다.
① 5 ② 4 ③ 3 ④ 우의 답은 모두 틀림

10. 한 볼록n각형의 아낙각의 합이 720°이다.
그러면 이 다각형의 대각선의 개수는 ＿＿＿이다.

11. 4각형에서 한 아낙각의 두 변이 다른 한 아낙각의 두 변과 각각 서로 수직이고 이 두 각의 크기의 비가 3:2이다. 그러면 이 두 각가운데서 큰 각

의 크기는 ______이다.

그림 1−40

12. 그림 1−40에서 ∠A+∠B+∠C+∠D+∠E= ______이다.

13. 2등변3각형 ABC에서 AB=AC=10, ∠A=30°이다.

밑변 BC의 임의의 점 P에서 AC, AB에 내린 수직선의 밑점을 각각 E, F라고 할 때 PE, PF의 크기는 ____이다.

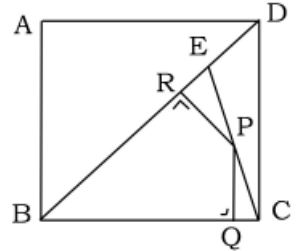



그림 1−41

14. 그림 1−41의 바른4각형 ABCD에서 BC=BE이다. 이때 PQ+PR는 BD의 _____배이다.

15. 바른제형에서 한 밑각이 45°, 높이가 h, 중간선이 m이면 이 제형의 두 밑변은 각각 ______이다.

16. 제형 ABCD에서 AD//BC, AB=AD+BC이고 CD의 가운데점을 M이라고 할 때 ∠DAM=50°이면 ∠ABC의 크기는 ______이다.

17. 평행4변형 ABCD의 대각선 AC에 평행인 직선이 AB, BC와 각각 점 E, F에서 사귀고 DA, DC의 연장선과 각각 G, H에서 사귄다면 EG=FH임을 증명하여라.

18. △ABC의 변 AB, BC의 가운데점을 각각 E, F라고 하고 AC에 AG=GH=HC되게 두 점 G, H를 정하였다. EG와 FH의 사귐점을 D라고 하면 4각형 ABCD는 평행4변형임을 증명하여라.

19. 평행4변형 ABCD에서 2AB=AD, 직선 AB에 AE=AB=BF되게 점 E, F를 잡고 EC와 FD의 사귐점을 G라고 하면 ∠EGF=∠R임을 증명하여라.

20. 평행4변형 ABCD의 정점 A, B, C, D 및 대각선의 사귐점 O에서 이 평행4변형과 사귀지 않는 직선 XY에 그은 수직선의 밑점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1 및 Q_1라고 하면 $AA_1+CC_1=BB_1+DD_1$임을 증명하여라.

21. 평행4변형 PQRS의 네 정점이 ◇ABCD의 매 변우에 있다. 이 두 평행4변형의 대각선은 한 점을 지난다는것을 증명하여라.

22. 직4각형 ABCD의 변 BC의 점 P를 지나며 대각선 AC에 평행인 직선을 그어 AB와 사귀는 점을 Q, 대각선 BD에 평행인 직선을 그어 CD와 사귀는 점을 R라고 하면 PQ+PR는 일정하다는것을 증명하여라.

23. 직3각형 ABC의 직각의 정점 A에서 변 BC에 높이 AD를 그었다. ∠B의 2등분선이 AC, AD와 사귀는 점을 각각 E, G라고 하고 E에서 BC에 높이 EF를 그으면 4각형 AGFE는 등변4각형임을 증명하여라.

24. △ABC의 변 AB, AC를 각각 한 변으로 하여 바른4각형 ABDE, ACFG를 3각형의 바깥쪽에 그리고 A에서 BC에 높이 AH를 그었다. HA의 늘임선이 EG와 사귀는 점을 M이라고 하면 M은 EG의 가운데점이라는것을 증명하여라.

답

1. ③ 2. ② 3. ③ 4. ① 5. ② 6. ②
7. ② 8. ③ 9. ③ 10. 9 11. 108°
12. 180° 13. 5 14. $\frac{1}{2}$ 15. $m+h, \quad m-h$
16. 80°

17. 지시: 4각형 ACFG와 ACHE는 AC를 함께 가지는 평행4변형임을 고려한다.

18. 지시: BD와 AC의 사귐점을 O라고 하고 4각형 BHDG가 평행4변형임을 먼저 증명한다.

19. 지시: CE, DF가 각각 ∠C, ∠D의 2등분선임을 증명한다.

20. 지시: 제형의 두 옆변의 가운데점들을 맺는 선분은 두 밑변의 합의 절반과 같다는 성질을 리용한다.

21. 지시: 4각형 AQCS와 ARCP가 평행4변형임을 증명한다.

22. 지시: AB의 연장선과 RP의 연장선과의 사귐점을 Q_1라고 하고 $PQ=PQ_1$, $RQ_1=DB$임을 증명한다.

23. 지시: $\angle AEG=\angle AGE$, $\triangle ABG\equiv\triangle FBG$임을 증명한다.

24. 지시: HA의 늘임선에 점 N을 AN=BC되게 정하고 $\triangle ABC\equiv\triangle EAN\equiv\triangle GNA$임을 밝힌다.

7) 원

① 원둘레와 원

ㄱ) 원둘레

평면에서 한 점 O로부터 일정한 거리 r에 있는 점 전부의 모임을 중심 O, 반경 r인 원둘레라고 부른다.

원둘레의 두 점을 맺는 선분을 활줄, 원둘레의 중심을 지나는 활줄을 원둘레의 직경이라고 부른다.

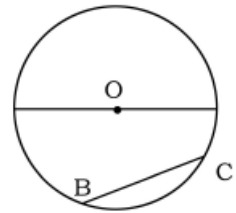
그림 1－42

직경은 활줄들가운데서 가장 크며 반경의 2배와 같다.

두 끝점을 가진 원둘레의 부분을 활등이라고 부른다.

끝점이 B, C인 활등을 BC와 같이 표시한다. (그림 1－42)

ㄴ) 원

원둘레와 그 아낙으로 된 도형을 원이라고 부른다.

② 원둘레의 대칭성

원둘레는 축대칭도형이다. 중심을 지나는 모든 직선이 대칭축으로

된다.

원둘레는 그 중심에 관한 점대칭도형이다.

원둘레는 그 중심을 회전중심으로 하는 임의의 회전이동에 의해서 자기자체로 넘어간다.

③ 활줄에 수직인 직경

· 활줄에 수직인 직경은 활줄을 2등분한다.

· 활줄의 수직2등분선은 원의 중심을 지난다.

· 활등(원둘레의 일부분)을 포함하는 원둘레의 중심구하기는 활등우에 세 점 A, B, C를 찍고 활줄 AB, BC의 수직2등분선을 그으면 그 사귐점이 원둘레의 중심으로 된다.

④ 원과 직선

ㄱ) 원둘레와 직선의 자리관계 (그림 1−43)

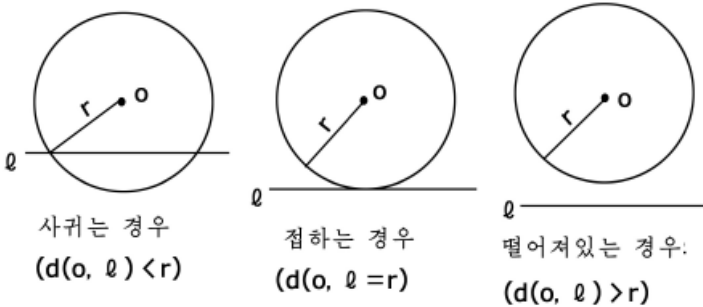



그림 1−43

ㄴ) 원둘레와 접선

· 원둘레의 접선은 접점에 그은 반경에 수직이다.

· 원둘레의 한 점을 지나며 그 점에 그은 반경에 수직인 직선은 원둘레에 접한다.

· 원둘레의 한 점에서 원둘레에 접하는 직선은 오직 하나뿐이다.

· 원밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같고 두 접선사이의 각은 그 점과 중심을 지나는 직선에 의하여 2등분된

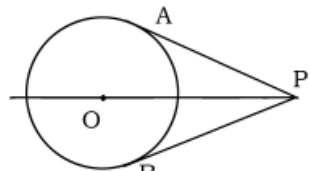



그림 1−44

다. (그림 1—44)

PA=PB, ∠APO=∠BPO

⑤ 원과 원

ㄱ) 두 원둘레의 자리관계 (그림 1—45)

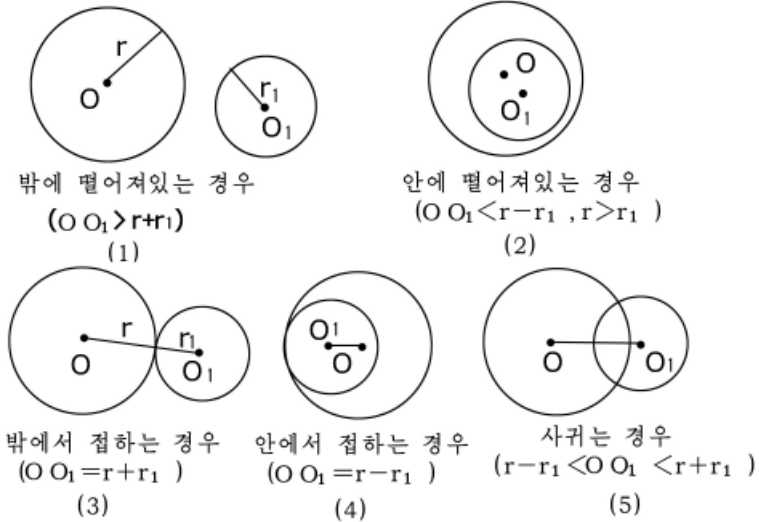



그림 1-45

ㄴ) 두 원둘레의 공통접선 (그림 1—46)

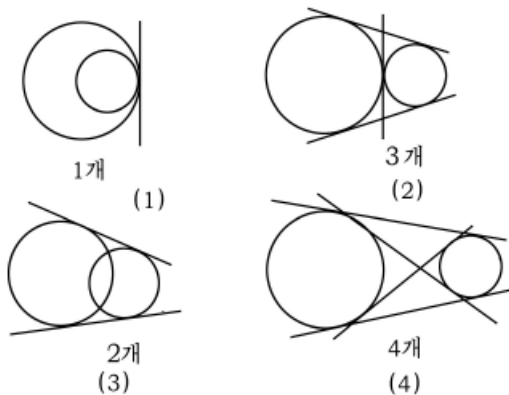



그림 1-46

⑥ 원과 다각형

ㄱ) 내접다각형과 외접원 (그림 1—47)

다각형의 모든 정점이 한 원둘레에 놓일 때 다각형은 그 원에 내접한다고 말하며 원둘레는 그 다각형에 외접한다고 말한다.

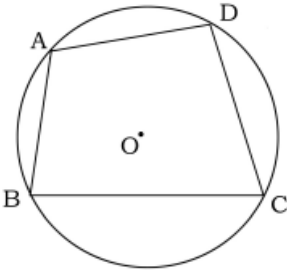



그림 1-47

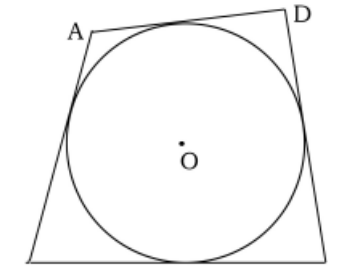



그림 1-48

ㄴ) 외접다각형과 내접원 (그림 1—48)

다각형의 모든 변이 한 원둘레에 접할 때 다각형은 그 원에 외접한다고 말하며 원둘레는 그 다각형에 내접한다고 말한다.

ㄷ) 3각형의 외접원, 내접원, 방접원

· 3각형의 세 변의 수직2등분선들은 한점에서 사귄다.

이 점은 3각형의 외접원의 중심으로 된다.

이 점을 3각형의 외심이라고 부른다. (그림 1—49)

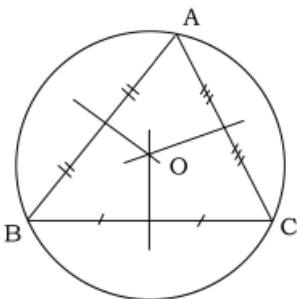



그림 1-49

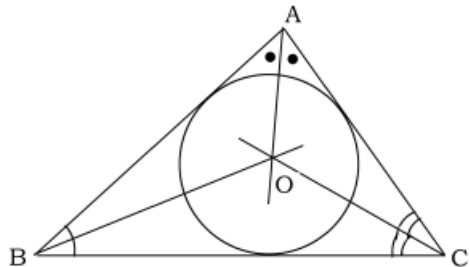



그림 1-50

· 3각형의 세 각의 2등분선들은 한 점에서 사귄다.

이 점은 3각형의 내접원의 중심으로 된다. 이 점을 3각형의 내심이라고 부른다. (그림 1－50)

· 3각형의 한 각의 2등분선과 다른 두 각의 보탬각의 2등분선들은 한 점에서 사귄다.

이 점은 3각형의 한 변과 다른 두 변의 연장선에 접하는 원의 중심으로 된다.

이 점을 3각형의 방심이라고 부른다. (그림 1－51)

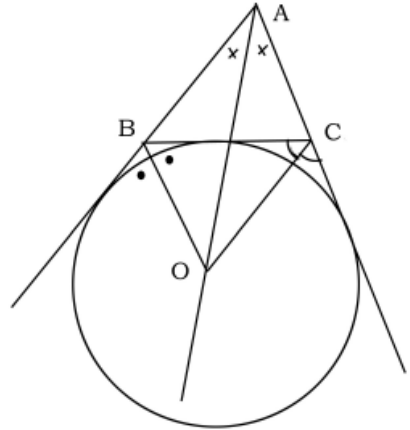



그림 1－51

⑦ 원과 각

ㄱ) 원둘레각과 중심각(그림 1－52)

· 원둘레의 한 점에서 나간 두 활줄사이의 각을 원둘레각이라고 부른다.

· 원의 중심을 정점으로 하는 각을 중심각이라고 부른다.

· 원둘레각은 같은 활등에 대한 중심각의 절반과 같다.

· 직경에 대한 원둘레각은 직각이다.

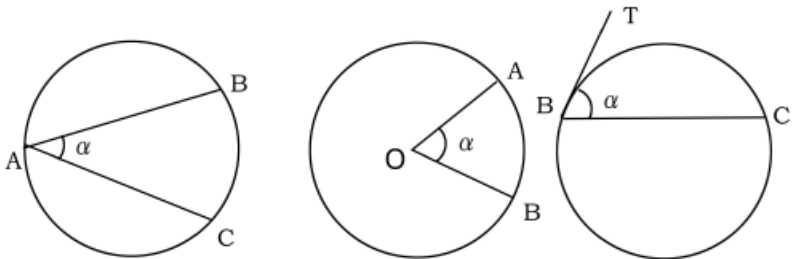



그림 1－52

· 같은 활등에 대한 원둘레각들은 같다.

ㄴ) 활줄접선각

· 원둘레의 한 점에서 나간 활줄과 활줄의 한 끝점에서 그은 접선사이의 각을 활줄접선각이라고 부른다.

· 활줄접선각은 같은 활등에 대한 원둘레각과 같다.

ㄷ) 활형의 각

한 활줄(BC)에 의하여 나누어진 원의 한 부분을 활형이라고 부른다.

그림 1-53의 활형에서 ∠BMC를 활형의 각 또는 BC가 품는 각이라고 부른다.

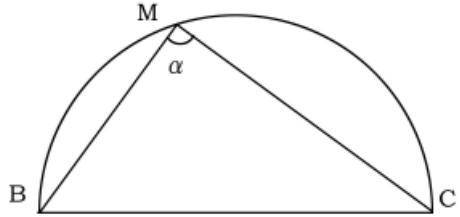



그림 1-53

⑧ 원과 4각형

· 원에 내접하는 4각형의 맞은각의 합은 180°이다.

· 맞은각의 합이 180°인 4각형은 원에 내접한다.

· 원에 외접하는 4각형의 맞은변의 합은 같다.

⑨ 원둘레의 길이와 원의 면적

· 반경이 r인 원둘레의 길이: $\ell=2\pi r$ (π=3. 1415492 65…)

· 반경이 r인 원의 면적: $S=\pi r^2$

· 반경이 r, 활등의 길이가 ℓ, 중심각이 α인 부채형의 면적은

$$S=\frac{\alpha\pi r^2}{360}=\frac{\ell r}{2}$$

활등의 길이는 $\ell=\frac{\alpha\pi r}{180}$

8) 문제풀이의 묘리

[례1] 원 O에서 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BD}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=3:4:5:6$이다. 점 A, B, C, D에서 각각 원에 접선을 그어 얻어지는 4각형의 아낙각들을 구하여라.

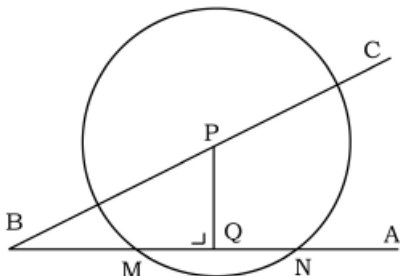
(설명) ∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠DOA는 그에 대한 활등의 길이에 비례하므로

$$\angle AOB=\frac{360°}{3+4+5+6}\times 3=\frac{360°\times 3}{18}=60°$$

$$\angle BOC = \frac{360° \times 4}{18} = 80°, \quad \angle COD = 100°, \quad \angle DOA = 120°$$

[례2] 뾰족각 ∠ABC의 변 BC우에 한 점 P가 있다. 점 P를 중심으로 하고 변 BA에서 길이가 2㎝인 활줄을 끊어내는 원을 그려라. (그림 1－54)

그림 1－54

(설명) 그리려는 원이 BA에서 끊어내는 활줄을 MN이라고 하고 P에서 BA에 그은 수직선의 밑점을 Q라고 하면 QN＝QM＝1㎝이므로 다음과 같이 그릴수 있다.

· 점 P에서 BA에 수직선 PQ를 긋는다.

· 반직선 BA에서 QN＝1㎝로 되는 점 N을 정한다.

· P를 중심, PN을 반경으로 하는 원을 그리면 이 원이 그리려는 원이다.

이런 원은 BQ ≧ 1㎝인 경우에만 1개 그릴수 있다.

BQ＜1㎝인 경우에는 그릴수 없다.

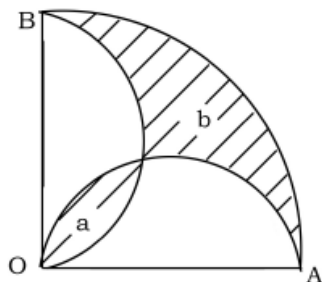
[례3] 4분원 OAB의 반경 OA, OB를 각각 직경으로 하는 반원을 그 안에 그렸을 때 빗선을 친 부분 a, b의 면적이 같다는것을 밝혀라. (그림 1－55)

그림 1－55

(설명) 직경이 OA인 반원에서 면적이 a인 도형을 던 차의 부분과 선분 OB 활등 $\overset{\frown}{OA}$, 활등 $\overset{\frown}{AB}$로 둘러막힌 도형 F에서 면적이 b인 도형을 던 차의 부분인 도형은 합동이다.

그러므로 $a=b$임을 밝히자면 반원 OA의 면적과 도형 F의 면적이 같다는것을 밝히면 된다.

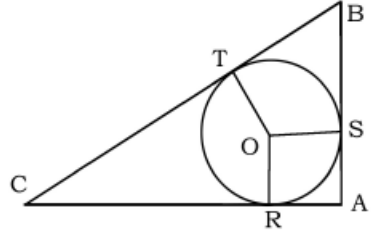
OA＝R라고 하면 반원 OA의 면적은

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} R^2$$

또한 도형 F의 면적은 $S_2 = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{\pi}{8}R^2 = \frac{\pi}{8}R^2$

$\therefore\ S_1 = S_2$ 즉 $a = b$

[례4] 직3각형 ABC의 내접원이 빗변 BC와 점 T에서 접하면 BT•CT는 그 3각형의 면적과 같다는것을 증명하여라. (그림 1—56)

그림 1—56

(설명) BT=BS, CT=CR, AR=AS이므로

$$BT = \frac{1}{2}(BC + BA - AC)$$

$$CT = \frac{1}{2}(CA + CB - AB)$$

$$\therefore\quad BT \cdot CT = \frac{1}{4}\left[BC + (BA - AC)\right]\left[BC - (BA - AC)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[BC^2 - (BA - AC)^2\right] = \frac{1}{4}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2 + 2BA \cdot AC\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2BA \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \triangle\text{ABC의 면적}$$

[례5] 3각형 ABC의 아낙중심 O를 지나 변 BC에 평행인 직선이 변 AB, AC와 각각 점 D, E에서 사귄다고 하자.

이때 DE=DB+CE임을 증명하여라.

(설명) O가 △ABC의 내심이므로 ∠DBO=∠OBC (그림1—57)

한편 DO//BC이므로 ∠DOB=∠OBC

∴ ∠DBO=∠DOB 즉 DO=DB

마찬가지로 OE=CE임을 얻는다.

∴ DE=DO+OE=DB+CE

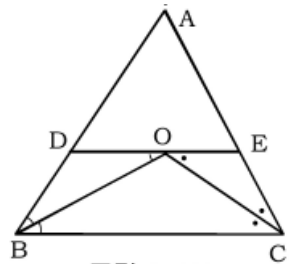



그림 1—57

[례6] △ABC의 ∠A의 2등분선과 BC와의 사귐점을 D라고 하고 A에서 BC에 그은 수직선을 AE, 외심을 O라고 하면 ∠OAD=∠EAD이

다. 증명하여라. (그림1－58)

(설명) AD는 ∠A의 2등분선이므로 AD의 연장선과 외접원과의 사귐점을 F라고 하면 F는 활등의 $\overset{\frown}{BC}$ 가운데점이다.

그러므로 OF⊥BC

∴ OF//AE

즉 ∠F＝∠EAD

한편 OA＝OF이므로 ∠F＝∠OAD

∴ ∠OAD＝∠EAD

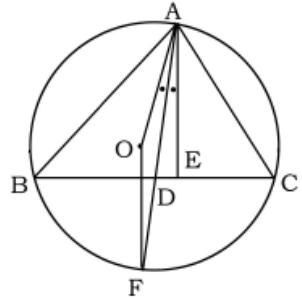



그림 1－58

[례7] 원 O의 직경을 AB라고 하고 반원둘레 AB우에 두 점 P, Q를 ∠AOP＝2∠BOQ되게 정한 다음 활줄 PQ의 연장선이 직경 AB의 연장선과 사귀는 점을 C라고 할 때 다음것을 증명하여라.

1) BP＝BC　　2) △OAP＝△BCQ

(설명) 1) ∠BPQ＝α로 표시하면 ∠BOQ＝2α

$\overset{\frown}{AP}=2\overset{\frown}{BQ}$이므로 ∠AOP＝4$\alpha$,

∠ABP＝2α

∴ ∠C＝∠ABP－∠BPC＝α

∴ ∠C＝∠BPC

즉 BC＝BP

2) (그림 1－59) O, Q에서 AP, OB에 각각 수직선 OM, QN을 그으면

그림 1－59

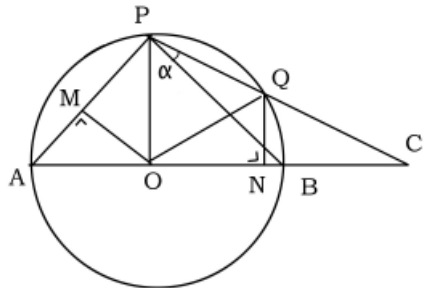
$$\triangle OAP=\frac{1}{2}AP\cdot OM \text{ 이고}$$

$$\triangle BCQ=\frac{1}{2}BC\cdot QN$$

∠APB＝∠R 이므로 OM//BP

O는 AB의 가운데점이므로 BP＝2OM

∴ BC＝2OM

한편 △OPM과 △OQN에서 OP＝OQ

$\angle$OMP ＝ $\angle$ONQ＝$\angle$R, $\angle$POM＝$\frac{1}{2}\angle AOP = 2\alpha = \angle NOQ$

그러므로 △OPM≡△OQN

∴ PM＝QN   즉 $\frac{1}{2}AP = QN$

△OAP＝$\frac{1}{2}AP \cdot OM = QN \cdot \frac{1}{2}BC = \Delta BCQ$

[례8] AB를 직경으로 하는 원둘레우의 한 점을 C라고 한다. ∠BAC의 2등분선이 이 원둘레와 사귀는 점을 D라고 하고 점 D에서 AB에 내린 수직선의 밑점을 E라고 하면 AC＝AE－EB임을 증명하여라. (그림1－60)

그림 1－60

(설명) EA우에 EF＝EB되게 점 F를 정하면 △BDE≡△DEF (∵∠E＝∠R, EF＝EB)

∴ ∠FDE＝∠BDE

그런데 직3각형 ABD에서 DE⊥AB이면 ∠BDE＝∠DAE＝∠BCD

∴ ∠FDE＝∠BCD

△ACD와 △ADF에서 ∠CAD＝∠DAF (AD는 ∠BAC의 2등분선)

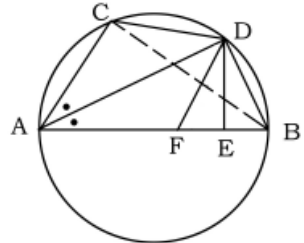
AD는 공통이다.

∠ACD＝∠ACB＋∠BCD＝∠R＋∠BCD

∠AFD＝∠DEF＋∠FDE＝∠R＋∠FDE＝∠R＋∠BCD

∠ACD＝∠AFD 이므로   △ACD≡△ADF

AC＝AF＝AE－EF＝AE－BE

∴ AC＝AE－BE

[례9] △ABC의 외접원의 한 점 A에서의 접선이 BC의 연장선과 사귀는 점을 P라고 하면 ∠APB의 2등분선은 변 AB, AC와 같은 각을 이룬다는것을 증명하여라. (그림1－61)

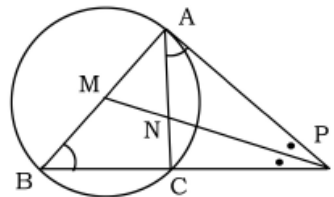



그림 1－61

(설명) ∠APB의 2등분선이 변 AB 및 AC와 사귀는 점을 각각 M, N이라고 하면 ∠AMP＝∠ABP＋∠BPM, ∠ANM＝∠PAN＋∠APN
그런데 ∠ABP＝∠PAN (활줄접선각)
∠BPM＝∠APN (조건)
∴ ∠AMP＝∠ANM

련습문제

1. 원밖의 한 점 A에서 원까지의 최대거리는 18㎝, 최소거리는 5㎝이다. 그러면 이 원의 반경은 ( )이다.

① 4㎝ ② 4.5㎝ ③ 5㎝ ④ 6.5㎝

2. 한 직선에 놓여있지 않는 세 점은 한개의 원을 결정한다. 그림 1−62에서 결정하는 원의 개수는 ( )이다.

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 9개

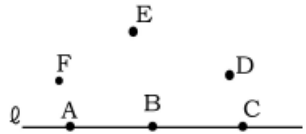



그림 1−62

3. 제형 ABCD에서 AB//DC, AD＝DC＝CB, ∠ADC＝140°이다.
만일 제형밖의 점 E가 제형의 외접원둘레에 있으면 ∠AEB는 ( )이다. (그림1−63)

① 40° ② 50°
③ 60° ④ 80°

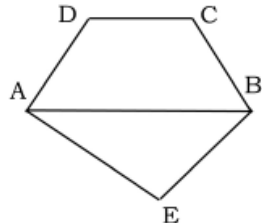



그림 1−63

4. △ABC에서 AB＝AC＝5㎝, BC＝6㎝이고 A를 중심으로 하는 한 원이 BC에 접하면 그 원의 반경은 ( )이다.

① 2㎝ ② 3㎝ ③ 4㎝ ④ 5㎝

5. △ABC의 세 변이 AB＝15㎝, BC＝14㎝, AC＝13㎝일 때 A를 중심으로 하는 한 원이 BC에 접하면 그 원의 반경은 ( )이다.

① 6㎝ ② 8㎝ ③ 10㎝ ④ 12㎝

6. 그림 1－64와 같이 두 동심원에서 큰 원의 활줄 AB가 작은 원과 C, D에서 사귄다. AB＝2CD이고 중심에서 활줄 AB까지의 거리가 CD의 절반과 같으면 큰 원과 작은 원의 반경의 비는 _____이다.

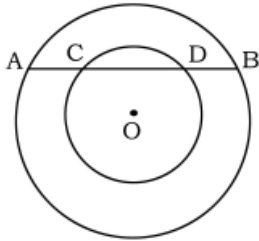
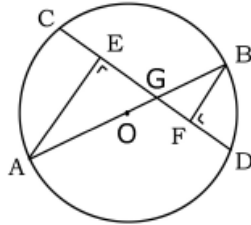



그림 1－64 그림 1－65

7. 그림 1－65에서 원 O의 반경은 5㎝이고 CD＝8㎝이다.
이때 AE－BF＝_____이다.

8. 그림 1－66에서 AB＝20㎝, CD＝12㎝일 때 직경 AB의 두 끝점 A, B로부터 CD까지의 길이의 합은 ______이다.

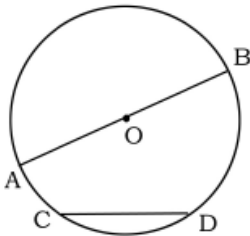



그림 1－66

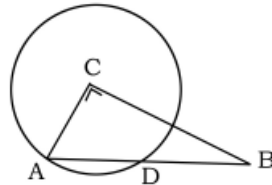



그림 1－67

9. 그림 1－67의 △ABC에서 AC＝ 6㎝, BC＝8㎝일 때 AD의 길이는 ____이다.

10. 직경이 30㎝인 원 O에 한쌍의 평행인 활줄 AB와 CD가 있다. AB＝18㎝, CD＝24㎝이면 두 활줄사이의 거리는 ______이다.

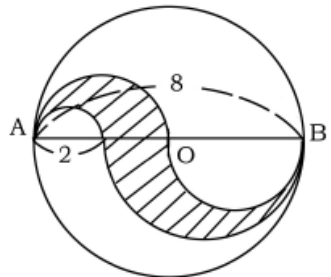



그림 1－68

11. 그림 1－68에서 빗선을 친 부분의 면적을 구하여라.

12. 원 O의 직경 AB의 늘임선우의 점 C에서 원 O에 접선 CD를 그었을 때 ∠ADC=114°25′이였다. 활등 $\overset{\frown}{BD}$에 대한 중심각의 크기를 구하여라.

13. 한 원둘레각의 2등분선은 이 원둘레각에 대한 활등을 2등분하고 그의 바깥각의 2등분선은 원둘레각의 정점이 놓여있는 활등을 2등분한다는것을 증명하여라.

14. △ABC의 ∠B와 ∠C의 2등분선의 사귐점을 I라고 하고 BI와 CI의 연장선이 외접원과 사귀는 점을 각각 D, E라고 할 때 DI＝EI이면 △ABC는 어떤 3각형인가?

답

1. ④ 2. ④ 3. ③ 4. ③ 5. ③

6. $\sqrt{5}:\sqrt{2}$ 7. 6㎝ 8. 16㎝ 9. 10㎝

10. 3㎝ 또는 21㎝ 11. 12.56㎠ 12. 48°50′

13. 지시: 같은 원둘레각에 대한 활등은 서로 같다. 한 각의 2등분선과 그의 바깥각의 2등분선이 이루는 각은 직각이며 직각에 대한 활등은 반원둘레이다.

14. 지시: 점 I는 △ABC의 내심, $\angle EAB=\frac{1}{2}\angle C$ 로부터

$\angle EAI=\angle AIE$

마찬가지로 $\angle DAI=\angle DIA$

그런데 EI＝DI이므로 4각형 ADIA는 등변4각형이다.

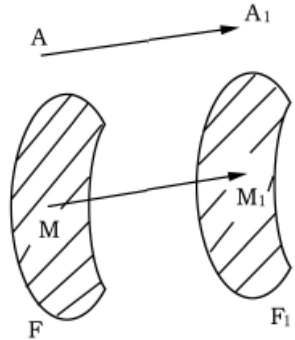
따라서 $\angle B=\angle C$ 이다.

2. 도형의 이동

1) 평행이동

그림 1-69

① 평행이동

화살표 $\overrightarrow{AA_1}$ 가 주어졌을 때 도형 F를 화살표의 방향으로 화살표의 길이만큼 밀어옮기는것을 도형 F의 평행이동이라고 말한다. (그림 1-69)

② 평행이동의 성질

ㄱ) 화살표와 평행이 아닌 직선은 평행이동에 의하여 그와 평행인 직선으로 옮겨간다.

ㄴ) 화살표와 평행인 직선은 평행이동에 의하여 자기자체로 넘어간다.

ㄷ) 평행이동에 의하여 선분의 길이와 각의 크기는 달라지지 않는다.

ㄹ) 평행이동에 의하여 도형의 둘레를 따라 돌아가는 방향은 달라지지 않는다. (그림 1-70)

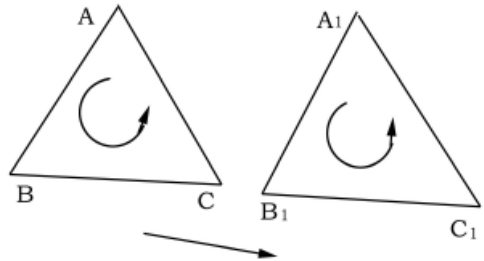



그림 1-70

2) 회전이동

① 회전이동

도형 F를 주어진 점 O를 중심으로, 주어진 방향으로, 주어진 각만큼 돌려옮기는것을 도형의 회전이동이라고 부른다. (그림 1-71)

이때 점 O를 회전중심, 각 α를 회전각, 돌아가는 방향을 회전방향이라고 부른다.

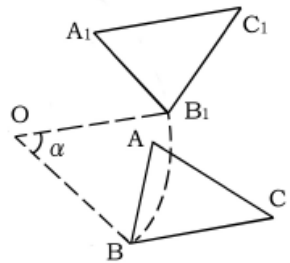



그림 1-71

② 회전이동의 성질

ㄱ) 직선은 직선으로 넘어간다.

ㄴ) 회전중심을 중심으로 하는 원은 자기자체로 넘어간다.

ㄷ) 선분의 길이와 각의 크기는 달라지지 않는다.

ㄹ) 도형의 둘레를 따라 돌아가는 방향은 달라지지 않는다.

3) 축대칭이동

① 축대칭이동

평면에 직선 ℓ이 주어졌을 때 도형 F를 직선 ℓ에 관하여 접어옮기는것을 도형 F의 축대칭이동이라고 부른다.

이때 직선 ℓ을 대칭축이라고 부른다. (그림 1−72)

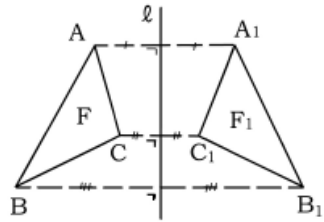



그림 1−72

② 대칭이동의 성질

ㄱ) 직선은 직선으로 넘어간다.

ㄴ) 대칭축에 수직인 직선은 자기자체로 넘어간다.

ㄷ) 선분의 길이와 각의 크기는 달라지지 않는다.

ㄹ) 도형의 둘레를 따라 돌아가는 방향은 반대로 된다.

③ 축대칭도형

어떤 직선에 관한 축대칭이동에 의하여 자기자체로 넘어가는 도형을 축대칭도형이라고 부르며 이때 그 직선을 그 도형의 대칭축이라고 부른다. (그림 1−73)

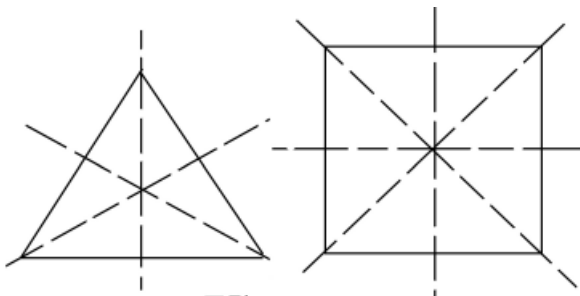



그림 1−73

4)점대칭이동

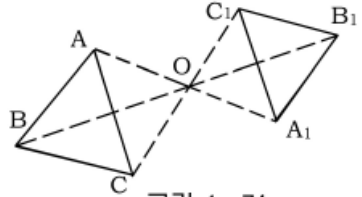
① 점대칭이동

회전각이 180°인 회전이동을 점대칭이동이라고 부르고 이때 회전중심을 대칭중심이라고 부른다. (그림 1−74)

② 점대칭도형

어떤 점을 대칭중심으로 하는 점대칭이동에 의하여 자기자체로 넘어가는 도형을 점대칭도형이라고 부르고 이때 그 점을 그 도형의 대칭중심이라고 부른다.

그림 1−74

바른4각형은 점대칭도형이지만 바른3각형은 점대칭도형이 아니다.

5) 문제풀이의 묘리

[례1] 서로 밖에 있는 두 원 O, O_1 과 선분 MN이 있다. 이 선분에 평행이며 또 그와 같은 길이를 가지는 선분을 두 원둘레사이에 끼워라.

(설명) 구하려는 선분을 AB라고 하자. (그림 1−75)

평행이동 $\overrightarrow{MN}$에 의하여 점 O가 O_2로 넘어간다면 $O_2B = OA$이다. 그러므로 점 B는 O_2를 중심으로 하고 원 O와 같은 반경을 가진 원둘레와 원둘레 O_1의 사귐점이다.

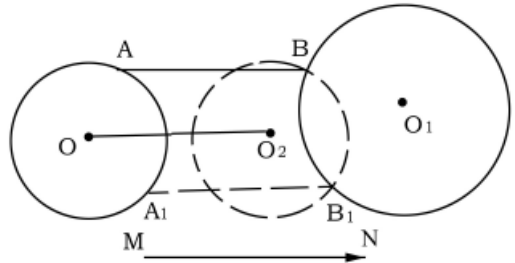



그림 1−75

만일 두 원둘레 O_2와 O_1이 사귀면 풀이는 2개, 접하면 1개, 떨어져있으면 풀이는 없게 된다.

[례2] 한 직선 ℓ과 그 량쪽에 점 A, B가 있다. 직선 ℓ에 정해진 길이 a와 같은 선분 MN을 긋는데 꺾임선 AMNB를 가장 짧게 하려

고 한다. 점 M, N을 어데 찍어야 하겠는가? 그 점들을 구하여라. (그림 1－76)

(설명) 조건에 맞는 점을 M, N이라고 하자. 평행이동 $\overrightarrow{NM}$ 에 의해서 선분 NB가 넘어가는 선분을 NB_1이라고 하면

$NB=NB_1, \quad MN=B_1B=a$

$\therefore\ AM+MN+NB=AM+MN+$

$+NB_1=a+AM+MB_1$

a는 일정하므로 $AM+MB_1$이 가장 짧아야 한다.

그것은 A, M, B_1이 한 직선에 놓일 때이다.

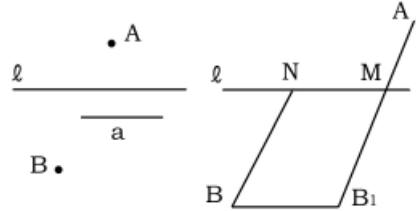



그림 1－76

[례3] △ABC와 밑변 BC를 함께 가지며 꼭두점 D가 BC에 관하여 점 A와 같은쪽에 있는 두 3각형 ABC와 DBC가 있다.

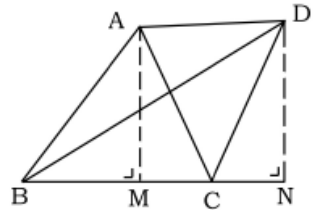
△ABC의 면적＝△DBC의 면적이면 BC//AD이다. 왜 그런가?

(설명) 점 A와 D에서 밑변 BC에 그은 수직선을 각각 AM, DN이라고 하면

그림 1－77

$$\triangle ABC\text{의 면적}=\frac{1}{2}BC\cdot AM$$

$$\triangle DBC\text{의 면적}=\frac{1}{2}BC\cdot DN$$

그런데 △ABC의 면적과 △DBC의 면적이 같으므로 AM＝DN이고 두 직선 BC와 AD사이의 거리가 같으므로 BC//AD이다.

[례4] 평행인 두 직선 ℓ, m사이에 한 점 A가 있다. 바른3각형 ABC를 그리는데 점 B는 직선 ℓ우에 있고 점 C는 직선 m에 있게 하여라. (그림 1－78)

(설명) △ABC가 조건에 맞는 3각형이라고 하자.

회전이동 A(－60°)에 의해서 C→B, C가 직선 m우의 점이므로 직선 m은 점 B를 지나는 직선 m_1로 넘어간다.

그리기: ㄱ) A에서 m에 내린 수직선의 밑점 H를 회전이동 A(−60°)에 의하여 H로 보낸다.

그림 1−78

ㄴ) 점 H를 지나며 직선 m과 60°의 각을 이루는 직선 m_1을 그린다.

ㄷ) 두 직선 ℓ과 m_1의 사귐점을 B라고 한다.

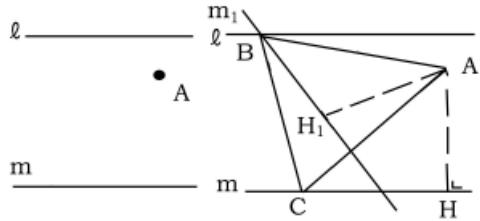
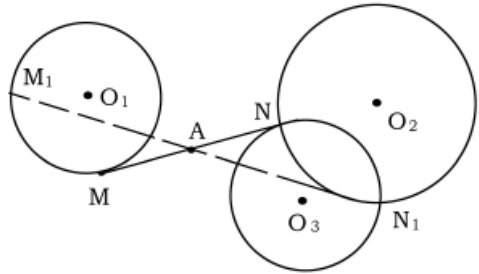
ㄹ) 회전이동 A(60°)에 의하여 점 B에 대응하는 점 C를 구한다. 이때 △ABC가 그리려는 3각형이다.

[례5] 두 원 O_1, O_2과 한 점 A가 있다. 두 끝점이 각각 원둘레 O_3, O_2우에 있는 선분을 긋되 점 A에 의해서 2등분되게 하여라. (그림 1−79)

그림 1−79

(설명) 조건에 맞는 선분 MN이 그려졌다고 하자.

점 A에 관하여 원 O_1와 점대칭인 원을 O_3이라고 하면 N은 원둘레 O_2과 O_3의 사귐점이다.

그리기: ㄱ) 점 A에 관하여 원 O_1과 점대칭인 원 O_3을 그린다. 원둘레 O_2와 O_3의 사귐점을 N이라고 한다.

ㄴ) 반직선 NA와 원둘레 O_1의 사귐점을 M이라고 한다.

MN이 구하려는 선분이다.

음미: 원둘레 O_2와 O_3과의 사귐점이 2개이면 풀이는 2개, 접하면 1개, 떨어져있으면 하나도 없다.

[례6] △ABC에서 AB>AC이면 ∠C>∠B임을 증명하여라. (그림 1−80)

(설명) ∠A의 2등분선 AD에 관하여 C와 대칭인 점을 E라고 하면

AB > AC이므로 E는 선분 AB우에 있다.

△ACD와 △AED가 AD에 관하여 서로 대칭이므로

∠C=∠AED (축대칭이동에서 겹쳐지는 두 각)

∠AED는 △BDE의 바깥각이므로

∠AED=∠B+∠BDE (3각형의 바깥각의 성질)

∴ ∠AED>∠B 즉 ∠C>∠B

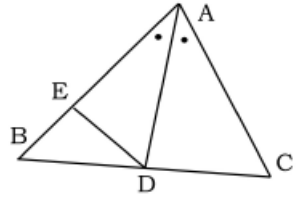



그림 1-80

[례7] 직선 a, b 및 ℓ이 있다. 두 직선 a, b 사이에 끼우는 선분을 그리되 직선 ℓ에 의하여 수직으로 2등분되게 하여라. (그림 1-81)

(설명) 조건에 맞는 선분 AB가 그어졌다고 하자.

점 B는 ℓ에 관한 A의 대칭점이므로 ℓ에 관하여 직선 a에 대칭인 직선 a'와 직선 b의 사귐점이다.

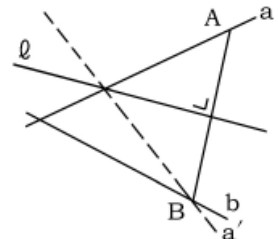
그리기.

ㄱ) 직선 ℓ에 관하여 a와 대칭인 직선 a'를 그린다. 직선 b와 a'의 사귐점을 B라고 한다.

ㄴ) ℓ에 관한 B의 대칭점 A를 구한다.

ㄷ) 점 A와 B를 맺으면 선분 AB가 그리려는 선분이다.

그림 1-81

ℓ
O
M
N
그림 1-82

련습문제

1. 그림 1-82와 같이 직선 ℓ, 원 O 및 선분 MN이 있다. 선분 MN과 같고 그에 평행인 선분 AB를 직선 ℓ과 원둘레 O사이에 끼우도록 하여라.

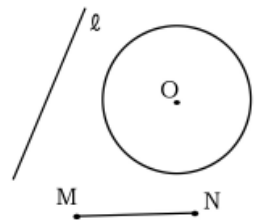
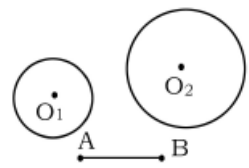
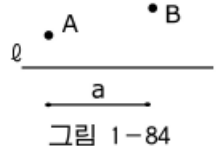



그림 1-83

2. 그림 1-83과 같이 두 원 O_1, O_2와 선분 AB가 있다. 원둘레 O_1, O_2에 각각 꼭두점 C,

D가 놓이는 평행4변형 ABCD를 그려라.

3. 직선 ℓ과 그 한쪽에 두 점 A, B 및 선분 a가 있다. (그림 1－84)

직선 ℓ에 두 점 C, D를 찍는데 AC//BD, CD＝a 되게 하여라.

그림 1－84

4. 원 O_1, O_2 및 점 A가 있다. (그림 1－85) 정각 ∠A＝30°인 2등변3각형 ABC를 그리되 점 B는 원둘레 O_1에 있고 점 C는 원둘레 O_2에 있게 하여라.

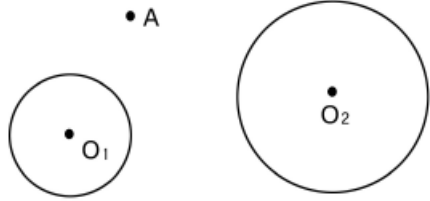



그림 1－85

5. ∠ABC와 그 아낙에 한 점 M이 있다. 각의 두 변사이에 끼우는 선분 PQ를 긋는데 그 선분이 점 M에서 2등분되게 하여라.

6. 원둘레 O와 그의 활줄 AB 및 원아낙의 한 점 M_1이 있다. 점 O를 중심으로 AB를 회전이동하여 점 M_1을 지나게 하려고 한다.

① 점 M_1에 대응하는 활줄 AB의 점 M을 구하여라.

② 활줄 AB에 대응하는 도형을 그려라.

7. 직선 a와 원둘레 O 및 직선 ℓ이 있다. (그림 1－86)

직선 a와 원둘레 O에 각각 끝점이 놓이는 선분을 긋되 직선 ℓ에 의해서 수직으로 2등분되게 하여라.

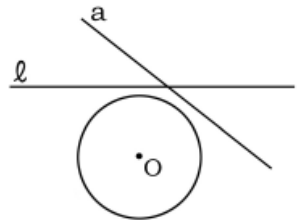



그림 1－86

8. ∠ABC의 아낙에 두 점 M, N이 있다.

변 BA, BC에 각각 점 P, Q를 찍되 MP＋PQ＋QN이 가장 작아지게 하여라.

9. 원 O와 그 바깥에 두 점 A, B가 있다. 원의 직경 PQ를 긋되 AP＝BQ되게 하여라.

10. $\angle XOY = 50^\circ$와 그 바깥에 점 A가 있다. OY에 관한 A의 대칭점을 A_1, OX에 관한 A_1의 대칭점을 A_2라고 한다. 어떤 이동에 의해서 점 A를 점 A_2로 넘길수 있는가?

답

1. 지시: 원둘레 O를 평행이동 $\overrightarrow{NM}$하고 생각한다.

2. 지시: 원 O_1을 평행이동 $\overrightarrow{AB}$하고 생각한다.

3. 지시: 점 A를 ℓ에 평행으로 a만큼 평행이동시키고 생각한다.

4. 지시: 회전이동 A(30°)에 의해서 원 O_1을 회전시키고 생각한다.

5. 지시: 점 M에 관한 B의 대칭점 B_1을 구한다.

6. 지시: O를 중심으로 하고 OM_1을 반경으로 하는 원둘레를 그려 AB와 사귀는 점을 M이라고 하면 $\angle MOM_1$이 회전각임을 고려한다.

7. 지시: 직선 ℓ에 관하여 a와 대칭인 직선 a_1을 긋는다.

8. 지시: 변 AB에 관한 M의 대칭점을 M_1, 변 BC에 관한 N의 대칭점을 N_1라고 할 때 직선 M_1N_1와 두 변과의 사귐점이 P, Q이다.

9. 지시: 점 O에 관한 A의 대칭점을 A_1라고 하면 $AP = A_1Q$인데 $AP = BQ$이므로 $A_1Q = BQ$이다.
따라서 Q는 A_1B의 수직2등분선과 원둘레 O와의 사귐점이다.

10. 지시: 회전이동 O(100°)

3. 도형의 닮음

1) 평행직선에서의 비례선분

① 선분의 비

두 선분을 같은 단위로 쟀을 때 그 길이의 비를 간단히 두 선분의 비라고 부른다.

② 평행직선에서의 비례선분

한 점 O를 지나는 직선들이 서로 평행인 두 직선과 사귈 때

ㄱ) 점 O를 지나는 직선들에서 대응하는 선분들은 비례한다.

즉 그림 1－87에서 AC//BD이면

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD},\qquad \frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$$

$$\therefore\ \frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OC}$$

그림 1－87

ㄴ) 대응하는 두 평행선분은 점 O로부터 그 선분들의 대응하는 끝점들까지의 선분들에 비례한다.

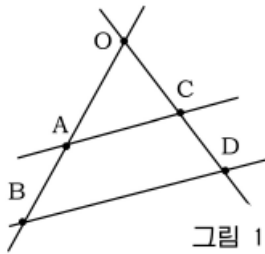
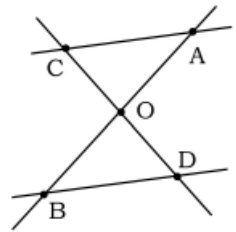
즉 그림 1－87에서 AC//BD이면

$$\frac{AC}{BD}=\frac{OA}{OB},\qquad \frac{AC}{BD}=\frac{OC}{OD}$$

ㄷ) 두 평행직선에서 대응하는 선분들은 비례한다.

즉 그림 1－88에서 AE//BF이면

$$\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF},\qquad \frac{AC}{AE}=\frac{BD}{BF}$$

$$\therefore\ \frac{CE}{AE}=\frac{DF}{BF}$$

ㄹ) (ㄱ의 거꿀정리)

한 점 O를 지나는 두 직선을 다른 두 직선이 자를 때 점 O를 지나는 두 직선에서 대응하는 선분들이 비례하면 그 자름선들은 서로 평행이다.

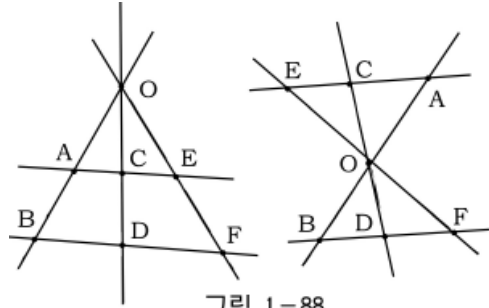



그림 1-88

즉 그림 1-88에서

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}$$

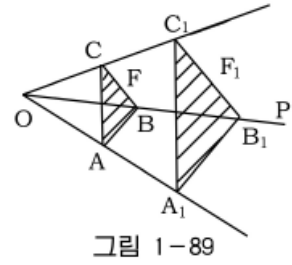
또는 $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$

또는 $\frac{OB}{AB}=\frac{OD}{CD}$이면 AC//BD이다.

2) 닮음도형

그림 1-89

① 중심닮음변환

• 평면에 한 점 O와 정수 k가 주어졌을 때 도형 F의 매 점 P를 반직선 OP에서 $OP_1=k\cdot OP$인 점 P_1로 보내는 넘기기를 점 O를 닮음중심으로 하고 k를 중심닮음비로 하는 중심닮음변환이라고 부르고 (k, O)와 같이 표시한다. (그림 1-89)

• 도형 F를 중심닮음변환 (k, O)에 의하여 도형 F_1로 넘겼을 때 $k>1$이면 F_1은 F를 k배로 늘인도형, $0<k<1$이면 F_1은 F를 k배로 줄인도형, $k=1$이면 F_1은 F와 일치하는 도형이다.

② 중심닮음변환의 성질

중심닮음변환에 의하여

ㄱ) 닮음중심을 지나지 않는 직선은 그에 평행인 직선으로 넘어간다.

ㄴ) 닮음중심을 지나는 직선은 자기자체로 넘어간다.

ㄷ) 선분은 그에 평행이거나 한 직선에 놓인 선분으로 넘어가며 이 선분의 주어진 선분에 대한 비는 중심닮음비와 같다.

ㄹ. 각은 같은 크기의 각으로 넘어간다.

③ 닮음도형

중심닮음변환에 의하여 도형 F가 F_1로 넘어가면 F와 F_1는 닮고 그 닮음비는 중심닮음비와 같다.

④ 3각형의 닮음조건

• 두 3각형은 다음과 같은 경우에 닮았다.

ㄱ) 세쌍의 대응하는 변의 비들이 다 같을 때

ㄴ) 두 쌍의 대응하는 변의 비들이 같고 그사이의 각들이 같을 때

ㄷ) 두 쌍의 대응하는 각들이 각각 같을 때

• 두 직3각형은 다음과 같은 경우에 닮았다.

ㄱ) 두쌍의 대응하는 변의 비들이 같을 때(두 쌍의 직각변 또는 빗변들과 한쌍의 직각변)

ㄴ) 한쌍의 뾰족각이 같을 때

⑤ 닮음도형의 둘레와 면적

ㄱ) 닮은 두 도형의 둘레의 비는 닮음비와 같다.

ㄴ) 닮은 두 도형의 면적의 비는 닮음비의 두제곱과 같다.

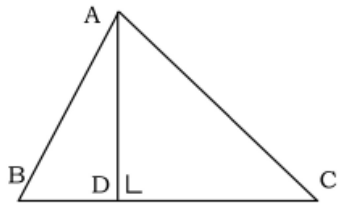
3) 직3각형에서의 크기관계

① 직3각형에서의 비례선분

직3각형 ABC의 직각의 정점 A에서 빗변 BC에 그은 수직선의 밑점을 D라고 하면 (그림 1－90)

그림 1－90

ㄱ) $AD^2=BD\cdot DC$

ㄴ) $AB^2=BD\cdot BC$, $AC^2=CD\cdot BC$

② 비례중항

세 선분 a, b, c에서 $a:b=b:c$ 즉 $b^2=ac$일 때 b를 a와 c의 비례중항이라고 부른다.

③ 피다고라스정리와 그의 거꿀정리

• 직3각형에서 두 직각변의 두제곱의 합은 빗변의 두제곱과 같다.

즉 직3각형 ABC에서 ∠A＝90°일 때

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

• 한 3각형의 한변의 두제곱이 다른 두 변의 합과 같으면 그 3각형은 직3각형이다.

• △ABC에서 $BC=a,\quad AC=b,\quad AB=c$ 라고 하면

ㄱ) ∠A: 뾰족각 ⇒ $b^2+c^2>a^2$

ㄴ) ∠A: 무딘각 ⇒ $b^2+c^2<a^2$

④ 《황금비》(중말비)

그림 1－91에서 점 M에 의하여 선분 AB가 AM∶MB＝MB∶AB인 비로 나누어질 때 선분 AB는 《황금비》(중말비)로 나누어진다고 말한다.

그림 1－91

4) 3각형의 아낙각 및 바깥각의 2등분선

[정리1] 3각형의 아낙각(바깥각)의 2등분선은 그 맞은변을 다른 두 변의 비로 내분(외분)한다.

즉 그림 1－92에서 AM, AN이 각각 ∠A의 2등분선, 바깥각의 2등분선일 때

$$\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}$$

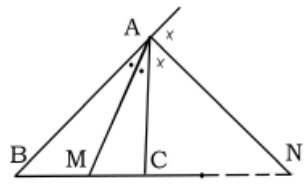



그림 1－92

[정리2] (거꿀정리)

3각형의 한 각의 정점에서 나가는 반직선이 맞은변을 다른 두 변의 비로 내분(외분)하면 그 반직선은 그 각(바깥각)의 2등분선이다.

5) 원에서의 크기관계

[정리1] (가름선에 관한 정리) 한 원에서 두 활줄이 사귀면 그

사귐점에서 나누어진 매개 활줄의 두 부분의 적들은 서로 같다.

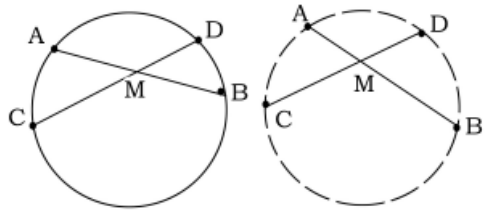



그림 1−93

[정리2] (거꿀정리)

점 M에서 사귀는 두 선분 AB와 CD가 있다.

AM · MB=CM · MD이면 네 점 A, B, C, D는 한 원둘레에 있다.(그림 1−93)

[정리3] (가름선과 접선에 관한 정리)

원밖의 한 점에서 가름선을 그으면 그 점으로부터 가름선과 원둘레와의 사귐점까지 이르는 두 선분의 적은 그 점에서 그은 접선의 두제곱과 같다.

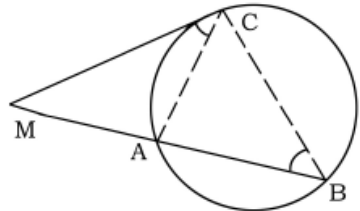



그림 1−94

계: 원밖의 한 점에서 가름선들을 그으면 그 점으로부터 매개 가름선이 원둘레와 사귀는 두 점까지 이르는 두 선분의 적들은 같다. (그림 1−94)

즉 $MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = \cdots$

[정리4] (거꿀정리)

원 O의 가름선 AB에서 점 M을 원밖에 잡고 원둘레에 점 C를 정하였을 때 $MA \cdot MB = MC^2$이면 MC는 원 O의 접선이다.

6) 자리길의 증명

움직이는 점의 자리길은 어떤 조건에 맞는 점들의 모임이다.

다음의 자리길은 흔히 리용되는 자리길이다.

① 한 점 O로부터 r만한 거리에 있는 점의 자리길은 원둘레 O(r)이다.

② 일정한 선분 a를 각 α로 보는 점의 자리길은 선분 a를 활줄로

하고 각 α를 품는 활형의 활등이다. (선분의 두 끝점은 제외)

③ 일정한 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자리길은 그 두 점을 맺는 선분의 수직2등분선이다.

④ 각의 두 변으로부터 같은 거리에 있는 점의 자리길은 그 각의 2등분선이다.

⑤ 직선 ℓ로부터 a(일정)만한 거리에 있는 점의 자리길은 직선 ℓ로부터 a만한 거리에 있으며 그에 평행인 두 직선이다.

도형 F가 조건 q를 만족시키는 점의 자리길이라는것을 증명하기 위해서는 다음과 같은 두가지를 밝혀야 한다.

ㄱ) 조건 q를 만족시키는 점은 도형 F에 있다.

ㄴ) 도형 F에 있는 점은 조건 q를 만족시킨다.

7) 문제풀이의 묘리

[례1] 자리표평면에서 자리표원점을 닮음중심으로 하고 중심닮음비가 k인 중심닮음변환 (k, O)에 의하여 점 $M(x, y)$가 $M_1(x_1, y_1)$로 넘어갈 때 x_1, y_1를 x, y에 의하여 표시하여라. (그림1−95)

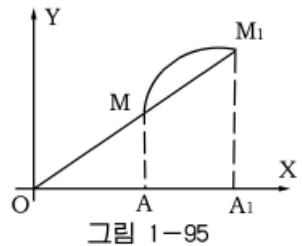
그림 1−95

(설명) 점 M, M_1에서 x축에 내린 수직선의 밑점을 각각 A, A_1이라고 하면

$OA = x$, $OA_1 = x_1$

중심닮음변환의 정의로부터 $OM_1 = k\,OM$

그런데 $MA // M_1A_1$이므로 $OA_1 = kOA$

$\therefore$ $x_1 = kx$ 마찬가지로 $y_1 = ky$

[례2] 자리표평면에서 점 A(2, 0)를 닮음중심이 자리표원점이고 중심닮음비가 2인 중심닮음변환 (2, 0)을 실시하고 O를 중심으로 30° 회전이동하였다. 점 A의 넘긴 점의 자리표를 구하여라. (그림1−96)

(설명) 중심닮음변환 (2, 0)에 의하여 점 A(2, 0)의 넘긴 점을 $A'(x', y')$라고 하면

$$x' = kx = 2\times 2 = 4, \quad y' = ky = 2\times 0 = 0$$

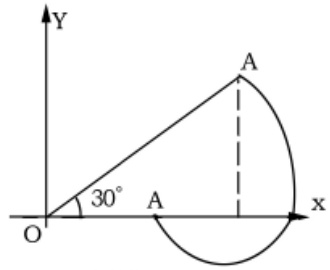
$\therefore \ A'(4, 0)$

점 $A'(4, 0)$를 O를 중심으로 하고 30° 회전이동한 점을 $A_1(x_1, y_1)$이라고 하면 $OA_1 = OA'$이므로

그림 1-96

$$x_1 = OA_1\cos\alpha = OA'\cos 30^0 = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$y_1 = OA_1\sin\alpha = OA'\sin 30^0 = 4\times\frac{1}{2} = 2$$

$\therefore \ A_1(2\sqrt{3}, 2)$

[례 3] 두 선분 AB, CD가 주어졌다. AB//CD, AB≠CD일 때 AB를 CD로 넘기는 중심닮음변환을 구하여라. (점 B, D는 직선 AC에 관하여 같은쪽에 있다.) (그림1-97)

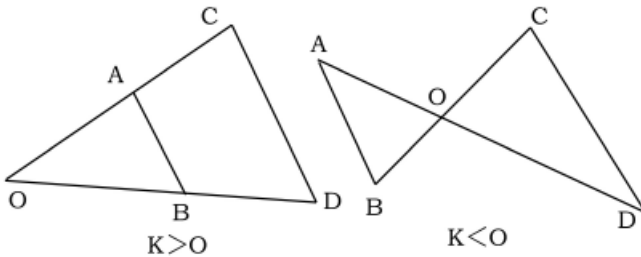



그림 1-97

(설명) 두 직선 AC 와 BD의 사귐점을 O라고 하면 AB//CD이므로

$$k = \frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$$

따라서 중심이 O이고 중심닮음비가 k=$\frac{CD}{AB}$인 중심닮음변환 ($\frac{CD}{AB}$, 0)

에 의하여 선분 AB는 선분 CD로 넘어간다.

만일 직선 AD와 BC의 사귐점을 O라고 하면 $k=-\frac{OD}{OA}=-\frac{DC}{AB}$

따라서 AB를 CD로 넘기는 중심닮음변환은 닮음중심이 O이고 중심닮음비는 $k=-\frac{DC}{AB}$이다.

중심닮음변환 (k, O)에 의한 점 M의 대응점을 M_1라고 하면

· K>0일 때 A_1는 직선 OA우에 있으면서 O에 관하여 M과 같은쪽에 놓인다.

이런 중심닮음변환을 정의 중심닮음변환이라고 부른다.

· K<0 일 때 점 A_1는 직선 OM우에 있으면서 O에 관하여 M과 반대쪽에 놓인다. 이런 중심닮음변환을 부의 중심닮음변환이라고 부른다.

[례4] 원둘레 C와 한 점 A가 주어졌다. 원둘레 C의 매 점과 A를 맺는 선분을 일정한 비 k로 나누는 점들로 된 도형이 원둘레임을 증명하여라.

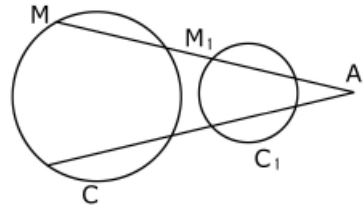
(설명) 주어진 조건에 맞는 도형을 C_1라고 하자. C우의 임의의 점을 M, 선분 AM을 비 k로 나누는 점을 M_1라고 하면 (그림 1－98)

$$\frac{AM_1}{M_1M}=K$$

그림 1－98

$$\frac{AM_1}{AM}=\frac{AM_1}{AM_1+M_1M}=\frac{1}{1+\frac{M_1M}{AM_1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{k}}=\frac{k}{k+1}$$

즉 $\frac{AM_1}{AM}=\frac{k}{k+1}=a$ (일정)

따라서 도형 C_1는 원둘레 C를 중심이 A이고 중심닮음비가 k인 중심닮음변환 (k, A)하여 얻은 도형이다. 그러므로 C_1는 원둘레이다. (중심닮음변환의 성질에 의하여)

[례5] 주어진 3각형에 내접하는 바른4각형을 그려라.

(설명) 조건에 맞는 바른4각형을 DEFG라고 하자. (그림 1－99)

변 EF는 BC우에 놓이며 두 정점 D, G는 각각 AB, AC우에 있다

고 하자.

BG우의 임의의 한 점 G'에서 BC에 평행인 직선이 AB와 사귀는 점을 D', D'에서 BC에 그은 수직선의 밑점을 E'라고 하면 바른4각형 DEFG ∽ 바른4각형 $D_1E_1F_1G_1$, $D'G' // DG$, $D'E' // DE$, $G'F' // GF$이므로 서로 중심닮음자리에 있다. 그리고 대응점을 맺는 직선 DD', EE'는 점 B를 지나므로 점 B는 이 두 바른4각형의 닮음중심이다.

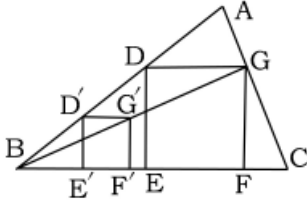



그림 1−99

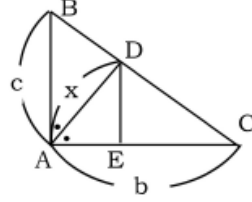



그림 1−100

[례6] 직3각형의 두 직각변은 각각 b, c와 같다. 직각의 2등분선의 길이를 구하여라. (그림 1−100)

(설명) △ABC에서 직각 A의 2등분선을 AD＝x라고 하자.

D에서 AC에 그은 수직선의 밑점을 E라고 하면

DE⊥AC, ∠DAE＝$\frac{\pi}{4}$이므로 $AE = DE = \frac{x}{\sqrt{2}}$, △CDE ∽ △CBA

∴ $\frac{ED}{AB} = \frac{CE}{CA}$이며 $\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{C} = \frac{b - \frac{x}{\sqrt{2}}}{b}$

즉 $x = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$

[례7] 직3각형 ABC의 뾰족각 B의 2등분선과 직각의 정점 C에서 빗변에 그은 수직선 CH, 직각변 AC와의 사귐점을 각각 E, F라고 하면 △CEF는 2등변3각형임을 증명하여라. (그림 1−101)

(설명) ∠BHC＝∠BCA＝∠R, ∠B는 공통이다.

∴ △CBH ∽ △CBA

∠BCH＝∠CAB, ∠CEF＝∠CBF ＋∠CAB

또한 ∠CFE＝∠CAB＋∠ABF,

∠CBF＝∠ABF (조건)

∴ ∠CFE＝∠CEF

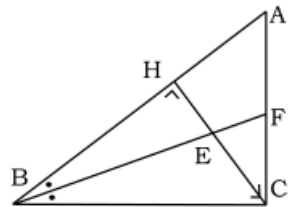



그림 1−101

즉 △CEF는 2등변3각형이다.

[례8] △ABC에서 ∠A=2∠B이면 같기식 $BC^2=AC(AB+AC)$가 선다는것을 증명하여라. (그림 1−102)

(설명) ∠A의 2등분선을 긋고 변 BC와 사귀는 점을 D라고 하면 ∠BAD=∠CAD=∠B (조건)

∠ADC=∠BAD+∠B=2∠B=∠BAC

∴ △ABC ∽ △DAC

또한 ∠BAD=∠B이므로 DA=BD

$$\therefore\ \frac{BC}{AC}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}=\frac{AB+AC}{BD+DC}=\frac{AB+AC}{BC}$$

∴ $BC^2=AC(AB+AC)$

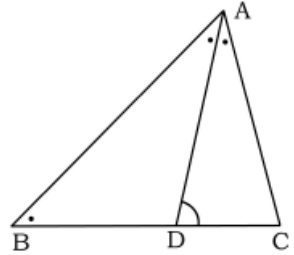



그림 1−102

[례9] △ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 X, Y, Z라고 하면 ZY우에 점 D로부터 ZD∶YD =ZB∶YC되게 하면 DX와 ZY는 수직임을 증명하여라. (그림 1−103)

(설명) ZD∶YD=ZB∶YC를 고쳐쓰면 ZD∶ZB=YD∶YC

또한 ∠BZD=∠CYD이다. ∴ △BZD ∽ △CYD

이로부터 ∠BDZ=∠CDY (1)

한편 BZ∶BD=CY∶CD, ZB=BX, CY=CX이므로 BX∶BD=CX∶CD

즉 XD는 ∠BDC의 2등분선이다.

∠BDX=∠CDX ⋯ (2)

(1), (2)로부터 ∠XDZ=∠XDY ∴ DX ⊥ ZY

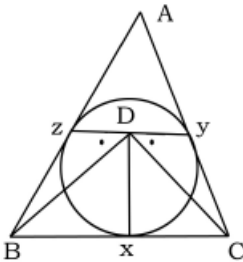



그림 1−103

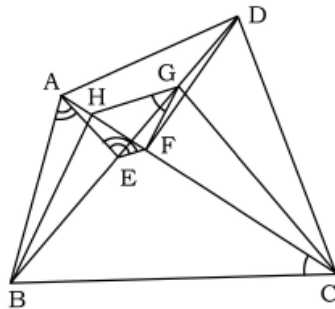



그림 1−104

［례10］ 4각형의 매 정점으로부터 그 정점을 지나지 않는 대각선에 수직선을 긋고 그 사귐점을 차례로 맺아서 얻은 4각형은 주어진 4각형과 닮았다는것을 증명하여라.

(설명) 그림 1－104에서와 같이 ∠BHC＝∠BGC＝∠R

즉 네 점 B, H, G, C는 한원둘레우에 있다.

∴ ∠HGB＝∠HCB

마찬가지로 A, H, E, B는 한원둘레우에 있으므로 ∠HED＝∠HAB

∴ △HEG ∽ △BAC

마찬가지로 △HFG ∽ △ADC이며

$$\frac{AB}{EH}=\frac{BC}{HG}=\frac{AC}{EG}, \qquad \frac{CD}{GF}=\frac{AD}{EF}=\frac{AC}{EG}$$ 이므로

$$\frac{AB}{EH}=\frac{BC}{HG}=\frac{CD}{GF}=\frac{DA}{FE}$$

또한 ∠A＝∠E, ∠B＝∠H, ∠C＝∠G, ∠D＝∠F

∴ 4각형 ABCD ∽ 4각형 HEFG

［례11］ △ABC의 아낙의 한 점 P를 지나며 BC, CA, AB에 평행인 직선 DE, FG, HI를 그으면 $\frac{BI}{BC}+\frac{CE}{CA}+\frac{AG}{AB}$＝1임을 증명하여라. (그림 1－105)

(설명) BC//DE, CA//FG이므로 ∠B＝∠ADE, ∠A＝∠DGP

∴ △ABC ∽ △GDP

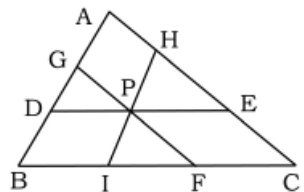
즉 $$\frac{DP}{BC}=\frac{GD}{AB}$$

그림 1－105

그런데 DP＝BI이므로

$$\frac{BI}{BC}=\frac{GD}{AB} \quad \cdots (1)$$

한편 DE//BC이므로 $\frac{CE}{CA}=\frac{DB}{AB}$ … (2)

(1)＋(2)＋$\frac{AG}{AB}$를 만들면

$$\frac{BI}{BC}+\frac{CE}{CA}+\frac{AG}{AB}=\frac{GD}{AB}+\frac{DB}{AB}+\frac{AG}{AB}=\frac{GD+DB+AG}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$$

[례12] 원에 내접하는 6각형 ABCDEF의 세 대각선 AD, BE, CF들이 한 점 P에서 사귀면 $\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$ 임을 증명하여라. (그림 1－106)

(설명) △ABP와 △EDP에서

∠APB＝∠DPE, ∠BAP＝∠DEP

(활등에 대한 원둘레각)

즉 △ABP ∽ △EDP이므로

$$\frac{AB}{DE}=\frac{PA}{PE} \quad \cdots (1)$$

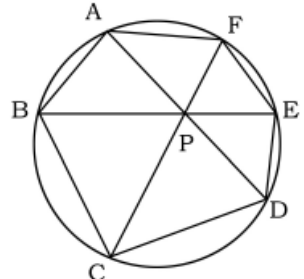
그림 1－106

마찬가지로 △BCP ∽ △FEP로부터

$$\frac{BC}{EF}=\frac{PC}{PE} \quad \cdots (2)$$

△CDP ∽ △AFP로부터 $\frac{CD}{FA}=\frac{PC}{PA}$ … (3)

(1). (2), (3)식으로부터

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{AB}{DE}\cdot\frac{EF}{BC}\cdot\frac{CD}{FA}=\frac{PA}{PE}\cdot\frac{PE}{PC}\cdot\frac{PC}{PA}=1$$

[례13] 원에 내접하는 4각형ABCD에서 맞은변들의 적의 합은 두 대각선의 적과 같다. 즉 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$

증명하여라.

(설명) 그림 1－107에서와 같이 ∠BAE＝＝∠DAC되게 점 E를 BD에 정하면 ∠ABD＝＝∠ACD(활등 $\overset{\frown}{AD}$ 에 대한 원둘레각)이므로

△ABE ∽ △AED

∴ AB∶AC ＝BE∶CD

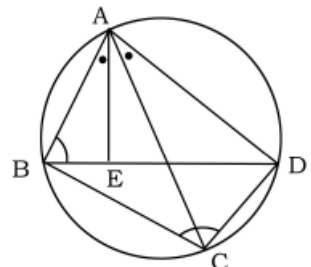



그림 1－107

즉 $AB \cdot CD = AC \cdot BE$ …(1)

또한 ∠BAC＝∠EAD, ∠ADB ＝∠ACB이므로

△ABC ∽ △AED ∴ BC∶ED ＝AC∶AD

즉 $BC \cdot AD = AC \cdot ED$ …(2)

(1)＋(2)로부터

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC(BE + ED) = AC \cdot BD$$

[례14] 바른7각형의 한 변의 길이를 a, 서로 같지 않은 대각선들의 길이를 b, c 라고 하면 $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}$임을 증명하여라. (그림 1－108)

(설명) ∠DAE＝∠EAF (같은 활등에 대한 원둘레각)

∠ADE＝∠AED (△ADE는 2등변3각형이므로)

AE와 DF의 사귐점을 H라고 하면

△ADE, △DEH,

△AHF는 서로 닮은 2등변3각형이다.

AF＝b, AD＝AE＝c 라고 할 때

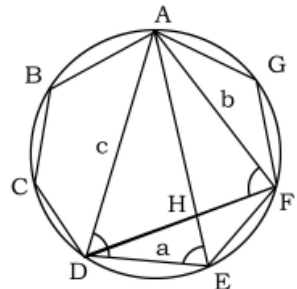
AH＝AF＝b 이므로 EH＝$c-b$

DH＝DE＝a 이므로 FH＝$b-a$

그림 1－108

△ADE ∽ △AHF이므로 AD∶AH ＝DE∶HF, $c:b=a:(b-a)$

$$\therefore ab+ac=bc$$

이 식의 두 변을 abc 로 나누면 $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}$

[례15] 직3각형 ABC의 직각의 정점을 A라고 하고 변 AC우의 한 점을 P라고 한다. 점 A에서 직선 BP에 그은 수직선과 점 B에서 빗변 BC에 그은 수직선이 사귀는 점을 Q라고 하고 직선 AC와 BQ가 사귀는 점을 R라고 하면 AP∶PC＝QR：RB임을 증명하

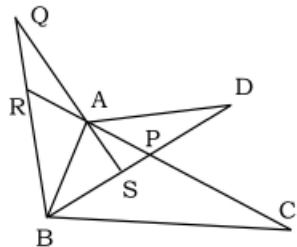



그림 1－109

여라. (그림 1－109)

(설명) 점 A에서 빗변 BC에 평행인 선을 긋고 BP의 연장선과 사귀는 점을 D라고 하면 AP:PC＝AD:BC (1)

AQ ⊥ BD, AR ⊥ BA, QR⊥DA (조건)이므로

△AQR ∽ △BDA (한 3각형을 한 점을 중심으로 하여 90°회전하면 대응변들은 서로 평행으로 된다.)

따라서 QR:AD ＝AR:BA

△ RAB와 △RBC에서 ∠R는 공통, ∠BAR＝∠RBC이므로

△ RAB ∽ △RBC AR:BA ＝ RB:BC

∴ QR:AD ＝ RB:BC

즉 AD:BC ＝ QR:RB (2)

(1), (2)로부터 AP:PC ＝ QR:RB

[례16] 원에 서로 사귀지 않는 두 활줄 AB, CD가 있다. AB에 대한 중심각은 120°이고 CD에 대한 중심각은 90°이다. 점 M은 활줄 AD와 BC의 사귐점이다. △AMB와 △CMD의 면적의 합이 100㎠일 때 이 두 3각형의 면적을 각각 구하여라. (그림 1－110)

(설명) ∠BAM＝∠DCM (활등 $\overset{\frown}{DB}$에 대한 원둘레각)

∠AMB＝∠CMD이므로

△AMB ∽ △CMD

$$\frac{\Delta AMB}{\Delta CMD}=\frac{AB^2}{CD^2}$$

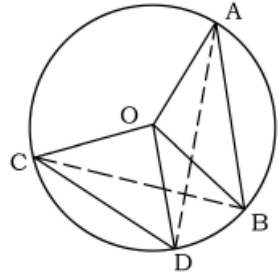
원의 반경을 R＝1이라고 하면

$AB=\sqrt{3}, CD=\sqrt{2}$ 이므로

그림 1－110

$$\frac{\Delta AMB}{\Delta CMD}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{100-\Delta CMD}{\Delta CMD}=\frac{3}{2}, \quad \Delta CMD=40 \text{ (㎠)}$$

$\Delta AMB=100-40=60$ (㎠)

[례17] △ABC의 변 AB, AD의 가운데점을 각각 E, F라고 하고 BF와 CE와의 사귐점을 G라고 하면 △GEF의 면적은 △ABC의 면적과 어떤 관계에 있는가? (그림 1－111)

(설명) CF＝FA이므로 △CBF＝△ABF, △CGF＝△AGF

∴ △CBF－△CGF＝△ABF－△AGF

즉 △ABG＝△CBG

마찬가지로 △CAG＝△BCG

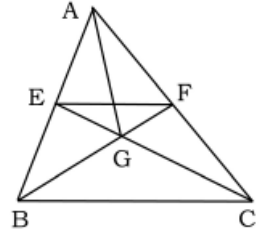
∴ $\triangle COB = \frac{1}{3} \triangle ABC$ …(1)

한편 △FGE ∽△BCG, $EG = \frac{1}{2} CG$

그림 1－111

$$\therefore \frac{\Delta FGE}{\Delta BGC} = \left(\frac{EG}{GC}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}CG}{GC}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

즉 $\triangle FGE = \frac{1}{12} \triangle ABC$ …(2)

(1), (2)로부터 $\triangle FGE = \frac{1}{12} \triangle ABC$

[례18] 평행4변형 ABCD의 정점 A를 지나는 임의의 직선을 긋고 이 직선이 대각선 BD와 직선 BC 및 DC의 연장선과의 사귐점을 각각 E, F, G 라고 하면 $EB^2 : ED^2 = EF : EG$이다. 증명하여라. (그림 1－112)

(설명) △EAB ∽ △EGD이므로 $\frac{\Delta EAB}{\Delta GED} = \frac{EB^2}{ED^2}$ (1)

다른 한편 $\frac{EF}{EG} = \frac{\Delta DEF}{\Delta GED}$

그런데 △DEF ＝△EAB이므로 $\frac{EF}{EG} = \frac{\Delta EAB}{\Delta GED}$ (2)

(1), (2)로부터

$EB^2 : ED^2 = EF : EG$

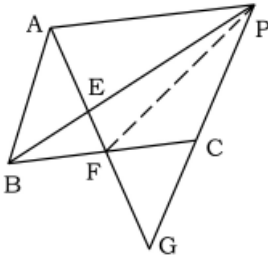



그림 1－112

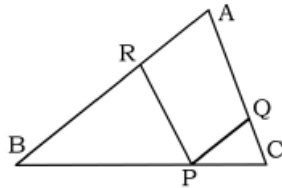



그림 1－113

[례19] △ABC의 변 BC우에 한 점 P를 지나서 AB, AC에 평행으로 그은 두 직선과 AB, AC로써 둘러싸인 평행4변형의 면적과 △ABC의 면적의 비를 8:2로 하려고 한다. 점 P를 어디에 정해야 하겠는가?(그림 1－113)

(설명) 점 P에서 AB및 AC에 평행으로 그은 직선이 다른 변과 사귀는 점을 각각 Q, R라고 하면 △ABC ∽ △RBP ∽ △QPC

$BC = a,\quad BP = x,\quad PC = y$ 로 놓으면

$$\frac{\Delta RBP}{\Delta ABC} = \frac{x^2}{a^2},\qquad \frac{\Delta QRC}{\Delta ABC} = \frac{y^2}{a^2}$$

평행4변형 ARPQ＝△ABC－△RBP－△QPC＝$(1-\frac{x^2+y^2}{a^2})$ △ABC

평행4변형 ABCD∶△ABC ＝ 8∶25

$$\therefore\quad 1-\frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{8}{25},\qquad x^2+y^2 = \frac{17}{25}a^2$$

$x + y = a$ 에서 $y = a - x$ 를 웃식에 넣으면

$$25x^2 - 25ax + 4a^2 = 0$$

$$x = \frac{25\pm\sqrt{625-400}}{50}a = \frac{25\pm15}{50}a,\qquad x_1 = \frac{4}{5}a,\qquad x_2 = \frac{1}{5}a$$

따라서 점 P는 변 BC를 5등분한 점가운데 점 B 또는 점 C에 가까운 두 점중에서 어느 한 점을 정하면 된다.

[례20] 바른제형 ABCD (AD//BC, AB=CD)에서

$AC^2 = AB^2 + BC \cdot AD$ 임을 증명하여라. (그림 1-114)

(설명) A, D에서 BC에 수직선 AM, DN을 그으면

직3각형 AMC에서 $AC^2 = AM^2 + MC^2$

직3각형 ABM에서 $AM^2 = AB^2 - BM^2$

$\therefore\ AC^2 = AB^2 + MC^2 - BM^2 = AB^2 + (MC + BM)(MC - BM) =$

$= AB^2 + BC(BN - BM) = AB^2 + BC \cdot MN = AB^2 + BC \cdot AD$

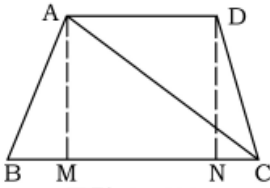
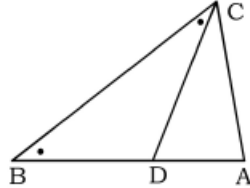



그림 1-114

그림 1-115

[례21] △ABC에서 $\angle A = 90^0$, $\angle B = 15^0$, $AC = 50$㎝일 때 빗변 CB의 길이를 구하여라. (그림 1-115)

(설명) △ABC에서 $\angle A = 90^0$, $\angle B = 15^0$ 이므로 $\angle C = 75^0$

이제 $\angle BCD = 15^0$ 되게 반직선 CD를 긋고 이 반직선과 BA의 사귐점을 D라고 하면 $\angle DCA = 75^0 - 15^0 = 60^0$, $\angle CDA = 30^0$

$\therefore\ BD = CD = 2AC = 100$, $AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2} CD = 50\sqrt{3}$

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{50^2 + \left(100 + 50\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{20\ 000 + 10\ 000\sqrt{3}}$$

$$= 100\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

[례22] 3각형을 한변에 평행인 직선에 의하여 면적이 같은 두 부분으로 나누어라. (그림 1-116)

(설명) △ABC에서 변 BC에 평행인 선분 DE가 면적을 2등분하였다고 하면 △ADE ∽ △ABC

$$\frac{\Delta ADE_{\text{의 면적}}}{\Delta ABC_{\text{의 면적}}} = \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ AD^2 = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{2} AB \cdot AB$$

그러므로 다음과 같이 할수 있다.

먼저 AB의 가운데점 M에서 AB에 세운 수직선과 AB를 직경으로 하는 반원둘레를 그려 그 사귐점을 G라고 한다.

다음에 AB우에 AD=AG인 점 D를 정하고 D를 지나 BC에 평행인 직선을 그으면 이것이 구하려는 직선으로 된다.

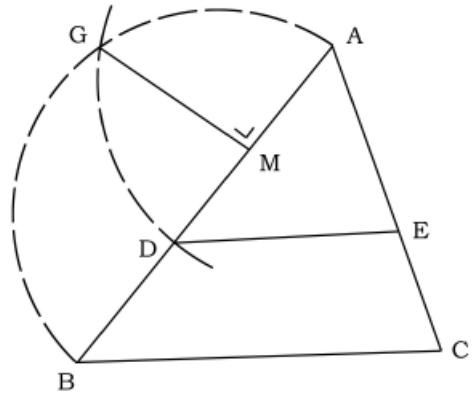



그림 1-116

[례23] 직4각형인 종이 ABCD를 AP(P는 변 BC우의 점)를 축으로 하여 접었을 때 B가 DC의 가운데점 E와 겹쳤다. BP:PC를 구하여라. (그림 1-117)

(설명) $AB=a,\quad BC=b,\quad BP=x$ 라고 하면

$$PC=b-x,\quad EP=x,\quad EC=\frac{a}{2}\text{ 이므로}$$

$$EP^2-PC^2=EC^2,\quad x^2-(b-x)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2\qquad x=\frac{1}{2b}\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)$$

$$\frac{BP}{PC}=\frac{x}{b-x}=\frac{\frac{1}{2b}\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)}{b-\frac{1}{2b}\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)}=\frac{\frac{a^2}{4}+b^2}{b^2-\frac{a^2}{4}}$$

한편 △ADE는 직3각형이므로

$$AD^2=b^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3a^2}{4}$$

$$\frac{BP}{PC}=\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}}{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a^2}{\frac{a^2}{2}}=2$$

$$\therefore\quad BP:PC=2:1$$

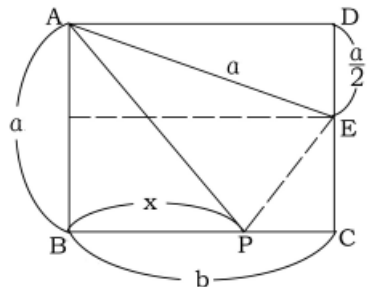



그림 1-117

[례24] △ABC에서 AB=15㎝, AC=20㎝이다. ∠B의 2등분선 BD와 ∠C의 2등분선 CE와의 사귐점을 M이라고 할 때 BM:MD를 구하여라. (그림 1−118)

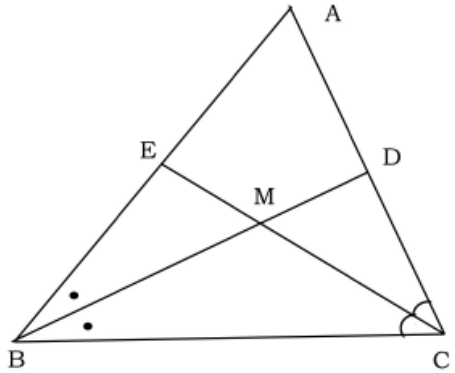



그림 1−118

(설명) △BCD에서 $\frac{BM}{MD}=\frac{BC}{CD}$

△ABC에서

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}=\frac{AC-CD}{CD}=\frac{5}{10}$$

AC=20㎝이므로

$$\frac{20-CD}{CD}=\frac{15}{10} \qquad \therefore\ CD=8㎝,$$

∴ BM:MD=10:8=5:4

[례25] 직3각형 ABC의 직각 A의 2등분선과 빗변과의 사귐점을 D, 점 D에서 AB에 그은 수직선의 밑점을 E라고 하면 $\frac{1}{DE}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$ 임을 증명하여라.

(설명) 그림 1−119와 같이 △AED에서 ∠EAD=∠EDA이므로

AE=ED

ED//AC이므로 $\frac{ED}{AC}=\frac{BE}{AB}=\frac{AB-AE}{AB}=1-\frac{AE}{AB}$

즉 $\frac{ED}{AC}=1-\frac{AE}{AB}$, $\frac{AE}{AB}+\frac{ED}{AC}=1$

그런데 AE=ED이므로 $\frac{ED}{AB}+\frac{ED}{AC}=1$

즉 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{ED}$

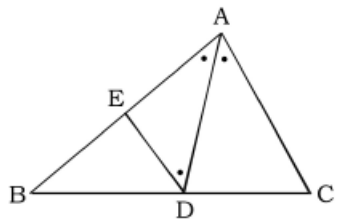



그림 1−119

[례26] △ABC의 변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c라고 하고 정각 A 및 그 바깥각의 2등분선이 변 BC와 사귀는 점을 D 및 E라고 할 때 선분 DE의 길이를 a, b, c로 표시하여라. (그림 1－120)

(설명) $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$, $BD+DC=a$ 로부터 $BD=\frac{ac}{b+c}$

AB＞AC인 경우 $\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$, $BE-CE=a$ 로부터

$BE=\frac{ac}{c-b}$ $\therefore\ DE=\frac{ac}{c-b}-\frac{ac}{b+c}=\frac{2abc}{c^2-b^2}$

AB＜AC인 경우에는 AB와 AC를 바꾸어놓고 마찬가지로 생각하면

$$DE=\frac{ba}{b-c}-\frac{ba}{b+c}=\frac{2abc}{b^2-c^2}$$

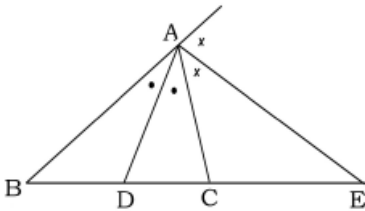



그림 1－120

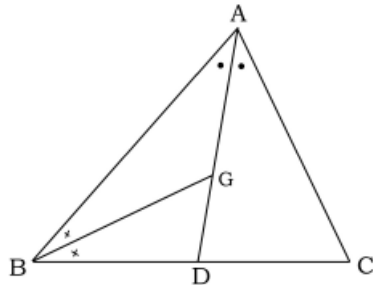



그림 1－121

[례27] △ABC의 내심을 G라고 하고 AG의 늘임선과 변 BC와의 사귐점을 D라고 하면 $\frac{AG}{BG}=\frac{AB+AC}{BC}$ 임을 증명하여라. (그림 1－121)

(설명) △ABC에서 BG는 ∠B의 2등분선이므로

$\frac{AG}{DG}=\frac{AB}{BD}$ (1)

또한 AD는 ∠A의 2등분선이므로 $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$

$\therefore \quad \dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{BD+DC}{AB+AC}=\dfrac{BC}{AB+AC}$

$\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AB+AC}{BC}$ (2)

(1), (2)로부터 $\dfrac{AG}{DG}=\dfrac{AB+AC}{BC}$

[례28] △ABC에서 ∠A의 2등분선이 변 BC와 사귀는 점을 D, 선분 AD우의 임의의 점을 P라고 하면 안같기식 $\dfrac{AB}{AC}<\dfrac{BP}{PC}$가 선다는것을 증명하여라. (그림 1－122)

(설명) AD는 ∠A의 2등분선이므로 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$ (1)

C를 지나며 AD에 평행인 직선이 BP의 연장선과 사귀는 점을 E라고 하면

$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BP}{PE}$ (2)

∠PEC＝∠BPD, ∠PCE＝∠DPC

이제 AB우에 $AC=AC'$되게 점 C'를 정하면 $\Delta AC'P\equiv\Delta ACP$

이로부터 $\angle C'PD=\angle CPD$,

점 C'는 선분 AB우에 있으므로

$\angle BPD<\angle C'PD$

∴ ∠PEC＜∠PCE

즉 PE＞ PC

$\dfrac{BP}{PE}<\dfrac{BP}{PC}$ (3)

(1), (2), (3)으로부터

$\dfrac{AB}{AC}<\dfrac{BP}{PC}$

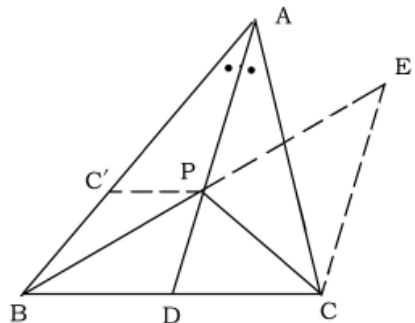



그림 1－122

[례29] 원에 내접하는 2등변3각형 ABC의 밑변 BC우의 임의의 점 D, E가 있고 AD, AE의 연장선이 원둘레와 사귀는 점을 각각 K, L이라고 하면 AD·AK=AE·AL임을 증명하여라.

그림 1-123

(설명) 그림 1-123에서

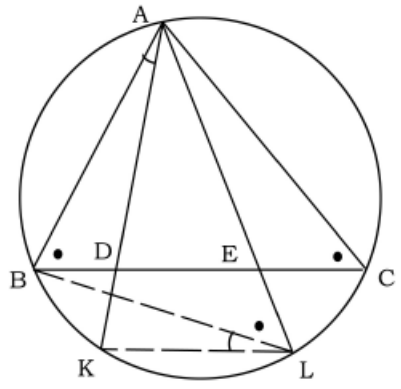
∠ABC=∠ACB, ∠ALB=∠ACB (활줄 AB에 대한 원둘레각)

∴ ∠ABC=∠ALB

또한 ∠BLK=∠BAK (활줄 BK에 대한 원둘레각)

∴ ∠ALK=∠ALB+∠BLK=∠ABC+∠BAK=∠ADC

즉 네 점 D, E, L, K는 한원둘레우에 놓인다.

∴ AD·AK=AE·AL

[례30] 원둘레 O우의 임의의 점 P에서 이 원의 직경 AB에 수직선 PC를 긋고 원둘레 P(PC)와 원둘레 O와의 사귐점을 R, S라고 하면 활줄 RS는 PC를 2등분한다. 증명하여라.

(설명) PC의 연장선이 원둘레 O, 원둘레 P와 사귀는 점을 각각 Q, D라고 하고 RS와 PC의 사귐점을 M이라고 하자. (그림 1-124)

그림 1-124

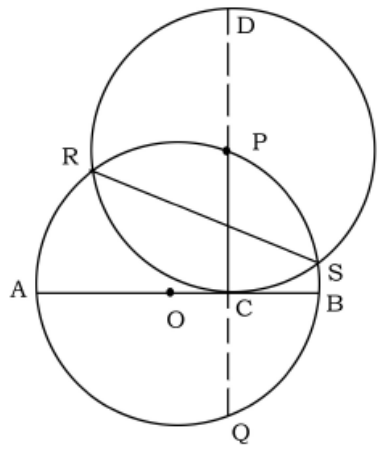
PD=PC=CQ ⋯(1)

MP·MQ=MR·MS

MP·MS=MC·MD

∴ MP·MQ=MC·MD

즉 MP(MC+CQ)=MC(MP+PD)

∴ MP·CQ=MC·PD (2)

(1), (2)로부터 MP=MC

[례31] 직선도로 AB의 한쪽에 두그루의 나무 P, Q가 있다. A에서 P, Q를 최대각 60°로 보고 A를 지나 2㎞의 지점 B에서 BA와 30°의 각을 이루는 방향으로 P, Q를 한직선에서 보았다. P, Q사이의 거리를 구하여라.

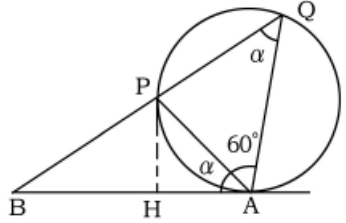



그림 1-125

(설명) ∠PAQ=60°는 직선도로 AB우의 점에서 PQ를 보는 가장 큰 각이므로 직선 AB는 점 A에서 △APQ의 외접원의 접선이다. (그림 1-125)

∴ ∠BAP=∠Q=α로 놓으면

△QAB에서 ∠B+∠BAQ+∠Q=180°

즉 30°+(60°+α)+α=180°, α=45°, ∠BPA=105°

이제 P에서 AB에 수직선 PH를 그으면

△APH, △BPH에서 AH=PH, BP=2PH

AH=x라고 하면 BH=2-x, PH=x

$$BP=\sqrt{(2-x)^2+x^2}=\sqrt{2x^2-4x+4}$$

∴ $\sqrt{2x^2-4x+4}=2x$

두 변을 두제곱하고 정돈하면 $2x^2+4x-4=0$

즉 $x=\sqrt{3}-1$ $BP=2x=2\left(\sqrt{3}-1\right)$

BA는 접선, BPQ는 가름선이므로 $BP\cdot BQ=BA^2$

$BQ=y$로 놓으면

$2(\sqrt{3}-1)y=4,\quad y=\sqrt{3}+1$

∴ $PQ=BQ-BP=3-\sqrt{3}\approx 1.3$ (㎞)

련습문제

1. 정점들이 아무런 4각형의 정점과 일치하는 4개의 무게중심은 주어진 4각형과 중심닮음인 도형을 만드는데 닮음비가 $\frac{1}{3}$과 같다는것을 증명하여라. (이때 대응하는 중심을 4각형의 무게중심이라고 부른다.)

2. 중심이 O인 원둘레와 점 A가 주어졌다. 원둘레우의 임의의 점 B와 A를 맺는 직선이 ∠AOB의 2등분선과 사귀는 점 M은 일정한 도형우에 있다. 증명하여라.

3. 반원안에 바른4각형을 그리되 두 정점은 직경우에, 다른 두 정점은 원둘레우에 놓이도록 하여라.

4. 주어진 부채형 OAB에 내접하는 바른4각형을 그리되 그 두 정점은 활등우에 있고 다른 두 정점은 각각 OA, OB우에 있게 하여라.

5. 평행4변형 ABCD의 대각선 AC우에 임의의 점 P를 지나는 직선과 AB, BC, CD, DA 또는 그 연장선과 사귀는 점을 각각 K, L, M, N이라고 하면 PK · PL=PM · PN임을 증명하여라.

6. 두 밑변이 a, b이고 작은 옆변이 c인 직각제형이 주어졌다. 대각선의 사귐점에서 길이 c인 밑변까지의 거리 및 작은 옆변까지의 거리를 구하여라.

7. 한 정점을 공통으로 가지는 △ABC와 $\Delta A'B'C'$가 닮으면 ΔABB와 $\Delta ACC'$도 역시 닮았다는것을 증명하여라.

8. 반원의 직경을 BC, 원둘레우의 임의의 점을 A라고 하고 AB우의 임의의 점 P로부터 BC에 내린 수직선의 밑점을 D, DP의 연장선과 원둘레와의 사귐점을 Q, CA의 연장선과의 사귐점을 R라고 하면 $PQ^2 = DP \cdot DR$이다. 증명하여라.

9. 바른4각형 ABCD가 있다. 변 CD와 AD의 가운데점을 각각 E, F, 직선 BE와 FC의 사귐점을 M이라고 하자. △BMC의 면적은 바른4각형의 면적의 $\frac{1}{3}$임을 증명하여라.

10. 3각형의 높이는 밑변을 36㎝와 14㎝의 두 부분으로 나눈다. 주어진 3각형의 면적을 2등분하는 밑변에 수직선을 그었을 때 이 수직선은 3각형의 밑부분을 어떤 부분으로 나누겠는가?

11. 주어진 선분을 두 부분으로 나누되 그가운데 한 부분이 다른 두 부분과 주어진 선분의 비례중항이 되게 하여라.

12. 바른3각형 ABC의 한변 BC를 빗변으로 하는 임의의 직3각형 PBC를 그리고 점 P로부터 변 BC에 그은 수직선의 밑점을 M이라고 하면 $AM^2+MP^2=BC^2$임을 증명하여라.

13. 직3각형 ABC의 직각의 정점 A에서 빗변 BC에 수직선 AE를 긋고 그 밑점 E에서 두 직각변 AB, AC에 각각 수직선 ED, EF를 그으면 $AB^3:AC^3=BD:CF$ 임을 증명하여라.

14. 직3각형 ABC의 두 직각변 AB, AC우에서 임의로 점 D, E를 각각 정하면 $BE^2+CD^2=BC^2+DE^2$임을 증명하여라.

15. 제형 ABCD에서 평행이 아닌 두 변을 AB, CD라고 하고 AB의 길이는 CD의 길이의 절반이라고 한다. 평행인 두 변 AD, BC우에 각각 한개의 점 K와 L을 취하되 AK를 KD의 절반, BL을 LC의 절반이 되게 하고 K와 L을 맺으면 KL은 AB 및 CD와 같은 각을 이룬다. 증명하여라.

16. △ABC에서 BC에 평행인 어떤 직선이 AB, AC와 사귀는 점을 각각 E, F라고 하고 BC의 가운데점을 D라고 할 때 DE가 ∠ADB의 2등분선이면 DF는 ∠ADC의 2등분선이다. 증명하여라.

17. △ABC에서 ∠B의 2등분선이 AC와 사귀는 점을 D, ∠C의 2등분선이 AB와 사귀는 점을 E라고 할 때 BE=CD이면 △ABC는 2등변 3각형이다. 증명하여라.

18. △ABC의 정각 A 및 그의 바깥각의 2등분선이 변 BC 및 그의 연장선과 사귀는 점을 각각 P, Q라고 하고 선분 PQ의 가운데점을 M이라고 하면 $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BM}{CM}$ 임을 증명하여라.

19. △ABC에서 ∠A의 2등분선이 BC와 사귀는 점을 D, BC의 가운데점을 M, △ADM의 외접원둘레가 AB, AC와 사귀는 점을 각각 P, Q라고 하면 BP=CQ이다. 증명하여라.

20. △ABC의 가운데선 AD 또는 그 연장선우의 임의의 점을 P라고 하고 △ABP, △ACP의 외접원이 변 BC 또는 그 연장선과 사귀는 점을 각각 E, F라고 하면 BE=CF임을 증명하여라.

답

1. 지시: 4각형을 ABCD라고 하고 대각선 AC, BD를 그었을 때 얻어지는 네개의 3각형 BCD, CDA, DAB, ABC의 무게중심을 각각 P, Q, R, S, 변 BC, CD, DA, AB의 가운데점을 각각 E, F, G, H라고 하면(그림 1－126)

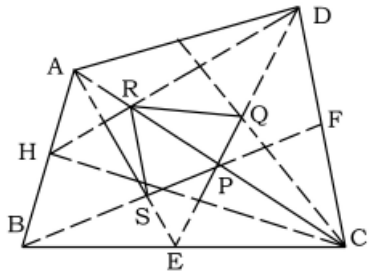



그림 1－126

ES: EA=1:3=EP:ED

∴ SP//DA, SP: DA=1:3

마찬가지로 PQ//AB, PQ:AB=1:3,

QR//BC, QR: BC=1:3

RS//CD, RS:CD=1:3

2. 지시: 그림 1－127에서 OM이 △OAB의 ∠O의 2등분선이므로

$$\frac{AM}{MB}=\frac{OA}{OB}$$

$$\therefore \quad \frac{AM}{AM+MB}=\frac{OA}{OA+OB}$$

즉 $\frac{AM}{AB}=\frac{OA}{OA+OB}=k$ (일정)

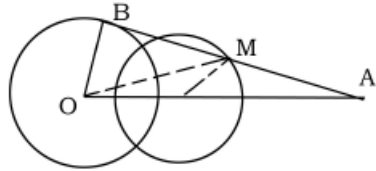



그림 1－127

따라서 점 M은 주어진 원둘레를 중심 닮음변환 (k, A)하여 얻은 도형우에 있다.

3. 지시: 반경이 R인 반원에 바른4각형 $A_1B_1C_1D_1$가 내접하고 정점 A_1, B_1는 직경우에, C_1, D_1는 반원둘레에 놓인다고 하자. (그림 1－128)

C_1, D_1가 반원둘레우에 놓인다는 조건만 없다면 직경 AB를 변으로 하는 바른4각형 ABCD를 그릴수 있다.

이때 4각형 ABCD와 $A_1B_1C_1D_1$은 닮음 4각형이다.

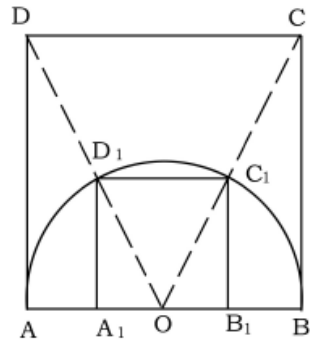



그림 1－128

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OC_1}{OC}=\frac{OD_1}{OD}=k$$

4. 지시: 구하려는 바른4각형이 그려졌다고 하자.

EF의 수직2등분선은 O를 지난다. 이 직선을 OX라고 하면 OX는 CD도 수직 2등분한다. (그림 1－129)

따라서 OC＝OD

그러므로 OA, OB우에 $OC'=OD'$ 되게 각각 C', D'를 정하고 C', D' 우에 바른4각형 $C'D'E'F'$를 그리면 두 바른4각형 CDEF, $C'D'E'F'$는 O에 관하여 중심닮음도형이다.

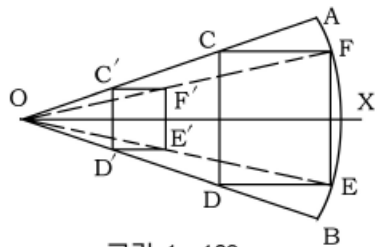



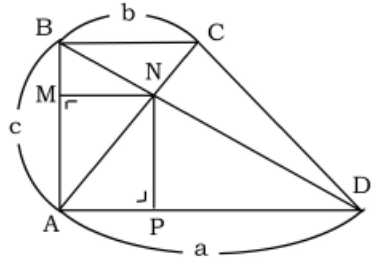
그림 1－129

5. 지시 : △PAK∽ △PCM, △PAN∽△PCL이라는데로부터 $\frac{PK}{PM}=\frac{PN}{PL}$ 이라는것을 밝혀라.

6. AD＝a를 직각제형 ABCD의 큰 밑변이라고 하자.

대각선의 사귐점 N에서 AD＝a및 AB＝a까지의 거리를 x 및 y라고 하면 △AMN ∽ △ABC, △NPD ∽ △BAD로부터

그림 1－130

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{c},\qquad \frac{x}{c}=\frac{a-y}{a}$$

즉 x, y를 구하면 된다. (그림 1－130)

7. 지시 : ΔABC ∽ $\Delta AB'C'$이므로 $\angle BAC=\angle B'AC'$

이로부터 $\angle BAB'=\angle CAC'$

그리고 $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}$로부터 $\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$ 이다. (그림1－131)

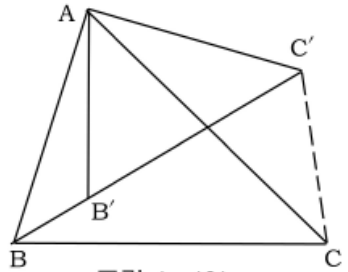



그림 1－131

8. 지시 : 직3각형 BDQ∽직3각형 RDC로부터 (그림 1－132) $DB\cdot DC=DQ\cdot DR$

직3각형 BDQ ∽ 직3각형 QDC로부터

$$DQ^2=DB\cdot DC$$

우의 두 식으로부터 증명된다.

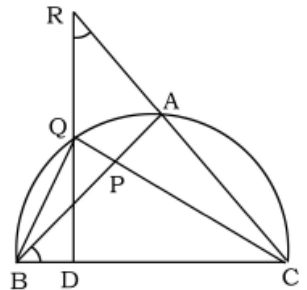



그림 1－132

9. 지시: △BMC ∽ △BCE에 의하여(그림 1－133) $\frac{\Delta BMC}{\Delta BCE}=\frac{BC^2}{BE^2}=\frac{BC^2}{CE^2+BC^2}$

그림 1－133

바른4각형 ABCD의 면적을 1이라고 할 때 BC＝1이고 $\frac{\Delta BMC}{\Delta BCE}=\frac{4}{5}$

여기서 △BCE의 면적은 4각형 ABCD의 면적의 $\frac{1}{4}$이다.

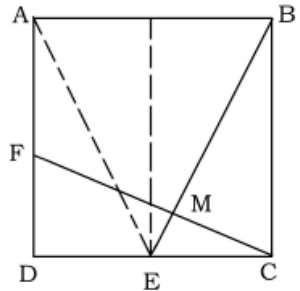
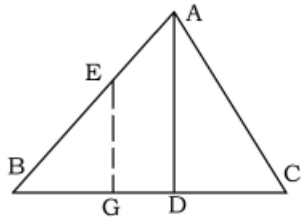
이로부터 $\Delta BMC=\frac{1}{5}$ (4각형 ABCD)

10. 지시: △ADB와 △ADC는 높이가 같으므로(그림1－134)

그림 1－134

$$\frac{\Delta ADB}{\Delta ADC}=\frac{36}{14}=\frac{18}{7},\quad \Delta ADB=\frac{18}{7}\Delta ADC$$

한편 △ADB ∽ △EGB이므로

$$\frac{\Delta ADB}{\Delta EGB}=\frac{\frac{18}{25}\Delta ABC}{\frac{1}{2}\Delta ABC}=\frac{36^2}{BG^2}$$ 에서 BG를 구한다.

11. 지시: 주어진 선분의 길이를 a, 구하려는 부분을 x라고 하면

$$x^2=a(a-x)$$

x를 구하면 $x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$, $x=-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a}$

이 두번째 풀이는 조건에 맞지 않는다. x를 그리려면 두 직각변의 길이가 각각 $\frac{a}{2}$와 a인 직3각형의 빗변에서 $\frac{a}{2}$만큼 떼버리면 된다.

12. 지시: (그림 1－135) 변 BC의 가운데점을 N이라고 하자.

먼저 NP＝BN임을 밝히고 △AMN과 △PMN에서 피다고라스정리를 리용한다.

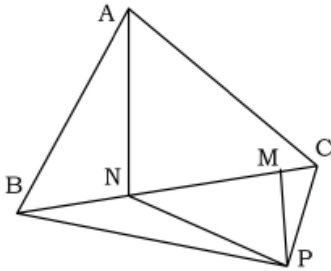



그림 1－135

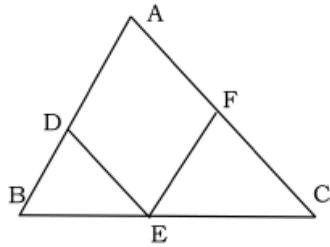



그림 1－136

13. 지시: 그림 1－136에서 $AB^2 = BE \cdot BC, \quad AC^2 = EC \cdot BC$

△EBD와 △FEC에서 $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{BD}{EF}$

$$\therefore \quad \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BE}{EC} = \frac{BD}{EF} \qquad \cdots(1)$$

FE//AB이므로 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{EF}{CF} \qquad \cdots(2)$

(1)과 (2)를 변끼리 곱한다.

14. 지시: △ABC와 △ADE에서(그림 1－137)

$AB^2 + AC^2 = BC^2, \quad AD^2 + AE^2 = DE^2$

이 두 식을 변끼리 더하고 △ABE와 △ADC에서

$AB^2 + AE^2 = BE^2, \quad AD^2 + AC^2 = CD^2$ 임을 고려한다.

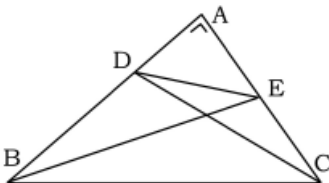



그림 1－137

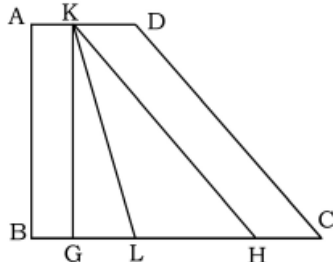



그림 1－138

15. 지시: 점 K를 지나 AB 및 DC에 평행인 직선을 그어 BC와의 사귐점을 G, H라고 한다. (그림 1－138)

$$KG = AB = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}KH$$

$$\therefore \quad \frac{KG}{KH} = \frac{1}{2}$$

한편 $LG = LB - GB = LB - KA =$

$$= \frac{1}{3}BC - \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}(BC - AD)$$

$$LH = LC - HC = LC - KD = \frac{2}{3}BC - \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}(BC - AD)$$

∴ LG∶LH＝1∶2

16. 지시: 그림 1－139에서

AE∶EB＝AF∶FC

AE∶EB＝DA∶DB＝DA∶DC

∴ AF∶FC＝DA∶DC

따라서 DF는 ∠ADC의 2등분선이다.

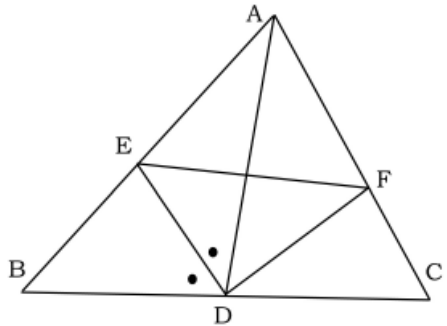



그림 1－139

17. 지시: $BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c$ 라고 하자. (그림 1－140)

$$\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \text{ 로부터} \qquad DC = \frac{ab}{c+a}$$

같은 방법으로 $EB = \dfrac{ac}{a+b}$

BE＝CD이므로

$$\frac{ac}{a+b} = \frac{ab}{c+a}, \qquad a \neq 0$$

이 식을 풀면 $c = b$

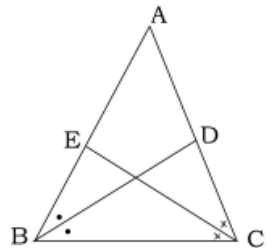



그림 1－140

18. 지시: (그림1－141)

그림 1－141

AB＞AC인 경우 BP＋BQ＝2BM

CQ－CP＝(CM＋MQ)－－(PM－CM)＝2CM

한편 $\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{PC}=\frac{BQ}{QC}$ 로부터

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BP+BQ}{PC+QC}=\frac{2BM}{PQ},$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{QP-BP}{QC-PC}=\frac{PQ}{2CM}$$ 이다.

이 두 식을 변끼리 곱한다.

19. 지시:

$$BP\cdot BA=BM\cdot BD,$$

$$CQ\cdot CA=CD\cdot CM$$

AD는 ∠A의 2등분선이며

AB:AC＝BD:DC 이므로

웃식으로부터 증명된다. (그림1－142)

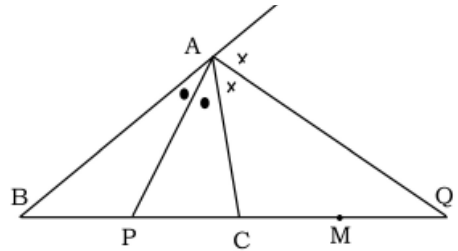
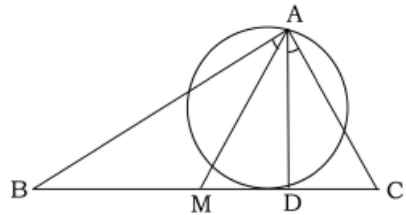



그림 1－142

20. 지시: 그림 1－143을 참고하여라.

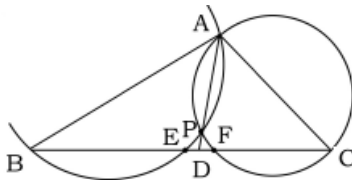



그림 1－143

제 2 장 공간도형

1. 직선과 평면

1) 공리와 계

[공리1] 직선의 두 점이 평면에 놓이면 직선은 그 평면에 완전히 놓인다.

[공리2] 한 직선에 놓이지 않는 세 점을 지나는 평면은 있으며 다만 하나 있다.

[공리3] 두 평면이 하나의 공통점을 가지면 그 평면들은 그 공통점을 지나는 한 직선에서 사귄다.

(계1) 직선과 그밖의 한 점을 지나는 평면은 있으며 다만 하나뿐이다.

(계2) 사귀는 두 직선을 지나는 평면은 있으며 다만 하나뿐이다.

(계3) 평행인 두 직선을 지나는 평면은 있으며 다만 하나뿐이다.

2) 공간에서 두 직선

① 공간에서 두 직선의 자리관계(그림 2−1)

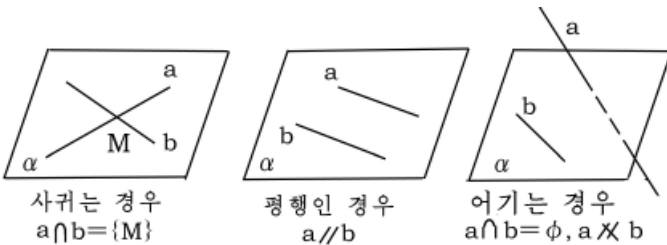



그림 2-1

② 어기는 두 직선사이의 각

a, b가 어기는 두 직선일 때 공간에 임의의 한점 O를 지나며 a//a′,

$b//b'$인 두 직선 a', b'를 긋자. 이때 두 직선 a'와 b'가 이루는 뾰족각(또는 직각)을 어기는 두 직선 a와 b사이의 각이라고 부른다. 어기는 두 직선사이의 각이 직각일 때 그 두 직선은 수직이라고 말한다.

③ 어기는 두 직선사이의 거리

· 어기는 두 직선에 각각 수직이고 서로 사귀는 선분의 길이가 어기는 두 직선사이의 거리이다.

· 어기는 두 직선사이의 거리는 점으로부터 직선까지의 거리 또는 평면까지의 거리로 바꿀 수도 있다.

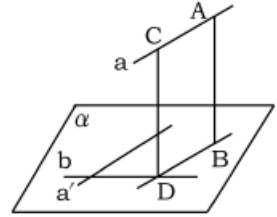



그림 2-2

· 어기는 두 직선사이의 거리는 그림 2-2와 같이 얻을수 있다.

a와 b가 어기는 두 직선이라고 하자.

ㄱ. b와 사귀며 $a//a'$인 직선 a'를 긋고 b와 a'가 결정하는 평면을 α라고 한다.

ㄴ. 직선 a의 점 A에서 α에 그은 수직선의 밑점을 B라고 하고 B를 지나 a'에 평행인 직선을 그어 b와 사귀는 점을 D라고 한다.

ㄷ. D를 지나 AB에 평행인 직선을 그어 a와 사귀는 점을 C라고 한다.

이때 선분 CD의 길이가 어기는 두 직선 a와 b사이의 거리이다.

3) 공간에서 직선과 평면

① 공간에서 직선과 평면의 자리관계(그림 2-3)

ㄱ. 직선이 평면에 놓이는 경우

직선과 평면은 적어도 2개의 공통점을 가진다.

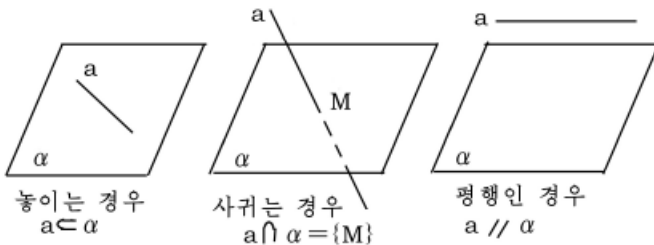



그림 2-3

ㄴ. 직선과 평면이 사귀는 경우
직선과 평면은 적어도 1개의 공통점을 가진다.
ㄷ. 직선과 평면이 평행인 경우
직선과 평면은 공통점을 가지지 않는다.

② 직선과 평면의 평행조건 및 평행과 관련한 정리들
[정리1] 평면 α에 놓이지 않는 한 점을 지나며 α에 놓인 한 직선 b에 평행인 직선 a는 평면 α에 평행이다.
[정리2] 직선 a가 평면 α에 평행일 때 a를 지나는 평면 β와 α와의 사귐선 b는 a에 평행이다.
[정리3] 서로 평행인 두 직선을 각각 지나는 두 평면의 사귐선은 주어진 두 직선에 평행이다.
[정리4] 한 직선 c에 각각 평행인 두 직선 a, b는 서로 평행이다.

③ 직선과 평면의 수직
ㄱ. 정의
직선 ℓ이 평면 α의 모든 직선에 수직일 때 직선 ℓ과 평면 α는 수직이라고 말하고 $\ell \perp \alpha$와 같이 표시한다.
평면에 수직인 직선을 그 평면의 수직선, 평면과 사귀면서 수직이 아닌 직선을 그 평면의 빗선이라고 부른다.
한 평면에 수직인 직선 또는 빗선이 그 평면과 사귀는 점을 수직선 또는 빗선의 밑점이라고 부른다.
ㄴ. 직선과 평면의 수직조건 및 수직과 관련한 정리들
[정리1] 평면 α와 사귀는 직선 ℓ이 평면 α에 놓여있는 사귀는 두 직선 a, b에 각각 수직이면 직선 ℓ은 평면 α에 수직이다.
[정리2] 한 점을 지나 주어진 평면에 수직인 직선은 있으며 다만 하나뿐이다.
[정리3] 평행인 두 직선가운데서 한 직선에 수직인 평면은 다른 직선에도 수직이다.
[정리4] 두 직선이 한 평면에 수직이면 이 두 직선은 서로 평행이다.
[정리5] 서로 평행인 두 평면가운데서 하나가 어떤 직선에 수직이면

다른 평면도 그 직선에 수직이다.

ㄷ. 세 직선의 정리와 그의 거꿀정리

[정리1] 평면에 놓이면서 그 평면의 빗선에 수직인 직선은 그 빗선의 평면에 대한 바른사영에도 수직이다. 거꾸로 평면에 놓이면서 빗선의 바른사영에 수직인 직선은 그 빗선에도 수직이다.

ㄹ. 직선과 평면사이의 각

평면 α의 빗선 ℓ이 평면 α에로의 ℓ의 바른사영 ℓ'와 이루는 뾰족각 θ를 직선 ℓ과 평면 α가 이루는 각이라고 부른다.

ℓ이 α와 수직일 때에는 ℓ이 α와 이루는 각이 직각이다.

4) 공간에서 두 평면

① 공간에서 두 평면의 자리관계(그림 2-4)

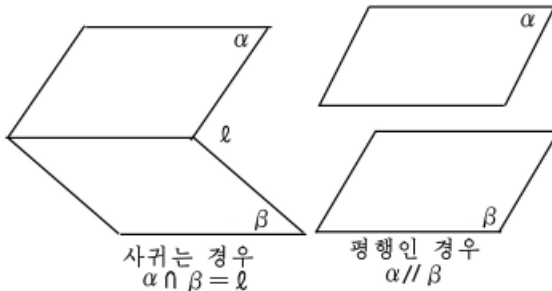



그림 2-4

② 두 평면의 평행조건과 평행과 관련한 정리들

[정리1] 한 평면 α에 놓이는 서로 사귀는 두 직선 a, b가 다른 평면 β에 평행이면 그 두 평면은 평행이다.

[계] 한 평면의 사귀는 두 직선이 다른 평면의 사귀는 두 직선에 각각 평행이면 이 평면들은 평행이다.

[정리2] 평행인 두 평면 α와 β가 각각 다른 한 평면 r와 사귀면 그 사귐선들은 서로 평행이다.

[정리3] 평면밖의 한 점을 지나며 그 평면에 평행인 평면은 있으며 다만 하나뿐이다.

[정리4] 평행인 두 평면사이에 끼인 평행선분들은 다 같다.

[정리5] 점 O에서 사귀는 두 직선 a, b와 점 O′에서 사귀는 두 직선 a′, b′ 가 있다. 이때 a//a′, b//b′이면 a, b가 이루는 각과 a′, b′가 이루는 각은 같다.

③ 2면각

· 한 직선으로부터 나가는 두개의 반평면으로 된 도형을 2면각이라고 부른다. 여기서 공통직선을 2면각의 모서리, 반평면을 2면각의 면이라고 부른다. 그리고 모서리가 AB이고 두 면이 α, β인 2면각을 《2면각 $\alpha AB\beta$》 또는 간단히 《2면각 AB》라고 부른다.

· 2면각의 모서리의 한 점 C에서 그 모서리에 수직인 반직선들을 각 면에 그었을 때 이 두 반직선이 만드는 각을 2면각의 평면각, 그 크기를 2면각의 크기라고 부른다.

④ 두 평면의 수직

두 평면이 사귈 때 생기는 2면각의 평면각을 두 평면사이의 각이라고 부른다.

두 평면사이의 각이 직각일 때 두 평면은 서로 수직이라고 부른다.

두 평면 α, β가 수직이라는것을 $\alpha \perp \beta$와 같이 표시한다.

[정리1] 평면 α에 수직인 직선을 지나는 평면 β는 α에 수직이다.

[정리2] 두 평면 α, β가 수직일 때 그 한 평면 α의 한 점 A에서 평면 β에 그은 수직선은 평면 α에 포함된다.

[정리3] 평면 α에 수직인 두 평면 β, γ의 사귐선 AB는 평면 α에 수직이다.

5) 문제풀이의 묘리

공면, 공선과 관련한 문제

[례1] 두 직선 ℓ_1, ℓ_2이 어기고있다. 직선 ℓ_1우의 점 A_1, A_2, …을 지나 ℓ_2에 평행인 직선 a_1, a_2, …을 그었을 때 a_1, a_2, …들은 한 평면에 놓인다는것을 증명하여라.

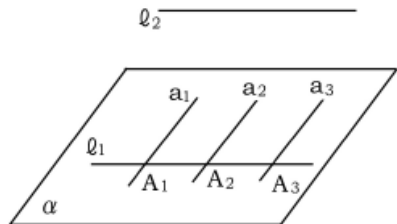



그림 2-5

(설명) $a_1 // \ell_2$, $a_2 // \ell_2$, $a_3 // \ell_2$, …이므로 $a_1 // a_2 // a_3 \cdots$

a_1, a_2, a_3은 한개의 평면을 결정하므로 그 평면을 α라고 하자.(그림 2−5)

$A_1 \in \alpha$, $A_2 \in \alpha$이므로 $\ell_1 \subset \alpha$

만일 a_3이 평면 α에 놓이지 않는다고 하자.

$a_3 // a_1$이므로 $a_3 // \alpha$

이것은 $a_3 \cap \ell_1 = \{A_3\}$에 모순된다. $\therefore a_3 \subset \alpha$

마찬가지로 $a_4 \subset \alpha$, $a_5 \subset \alpha$, …임을 증명할수 있다.

$\therefore$ a_1, a_2, a_3, …은 모두 한 평면에 놓인다.

[례2] ℓ_1, ℓ_2이 어기는 직선이라고 하자. ℓ_1우에 점 A_1, A_2, …이 있고 ℓ_2우에 점 B_1, B_2, …있다고 할 때 선분 A_1B_1, A_2B_2, …의 가운데점 M_1, M_2, …들은 한 평면에 있다는것을 증명하여라.(그림 2−6)

그림 2−6

(설명) 선분 A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4, …의 가운데점들을 각각 N_1, N_2, N_3, …이라고 하면 $M_1N_1 // \ell_2$, $M_2N_2 // \ell_2$

$\therefore$ M_1N_1, M_2N_2은 한개의 평면 α를 결정한다.

이제 M_3, M_4, …들이 모두 α에 놓인다는것을 증명하자.

만일 M_3이 α에 놓이지 않는다고 하자.

$N_2M_3 // \ell_1$이므로 $N_2M_3 // N_1M_2$

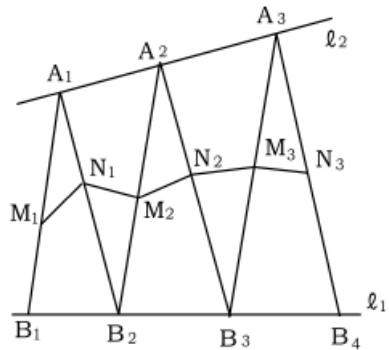
$\therefore N_2M_3 // \alpha$

이것은 $N_2M_3 \cap \alpha = \{N\}$에 모순된다.

$\therefore$ $N_2M_3 \subset \alpha$

즉 $M // \alpha$

마찬가지로 M_4, M_5, …이 모두 α에 있다는것을 증명할수 있다.

$\therefore$ M_1, M_2, M_3, …은 모두 한 평면에 놓인다.

[례3] 바른6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 AC_1과 평면 A_1BD의 사귐점 P는 BD에 수직인 직선우에 놓인다는것을 증명하여라.(그림 2−7)

(설명) AC의 가운데점을 O라고 하면 평면 $ACC_1A_1 \cap A_1BD = A_1O$, $P \in AC_1$, $P \in A_1BD$이므로 $P \in A_1O$이다.

$\triangle A_1BD$는 바른3각형이므로 $A_1O \perp BD$

즉 P는 DB에 수직인 직선우에 있다.

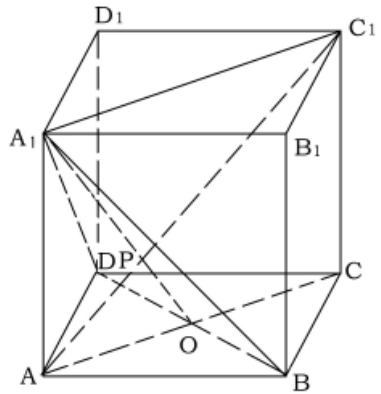



그림 2-7

[례4] 한 평면에 놓이지 않는 세 직선이 둘씩 서로 사귀면 이 세 직선은 한 점에서 사귄다는것을 증명하여라. (그림 2−8)

(설명) 한 평면에 놓이지 않으며 둘씩 서로 사귀는 세 직선을 각각 a, b, c라고 하자. a와 b가 결정하는 평면을 α로, b와 c, a와 c가 결정하는 평면을 각각 γ, β라고 하자.

$a \cap b = \{0\}$이라고 하면 $O \in a$이므로 $O \in \beta$

또한 $O \in b$이므로 $O \in \gamma$

$\therefore$ O는 β와 γ의 공통점이다.

$\therefore$ $O \in C$

즉 a, b, c는 한 점에서 사귄다.

그림 2-8

(다른 방법) $a \cap b = \{O\}$, a와 b가 결정하는 평면을 α라고 할 때 c가 점 O를 지나지 않는다고 하자. (그림 2−9)

$a \cap b = \{O'\}$, $b \cap c = \{O''\}$라고 하자.

그러면 $O' \in \alpha$, $O'' \in \alpha$

$\therefore$ $c \subset \alpha$

이것은 세 직선 a, b, c가 한 평면에 놓이지 않는다는데 모순된다.

$\therefore$ a, b, c는 한 점 O에서 사귄다.

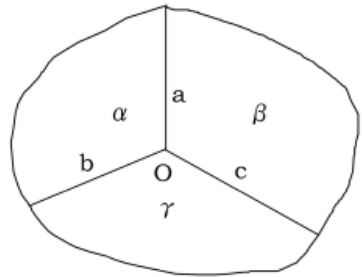
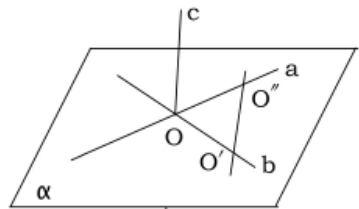



그림 2-9

공간에서 두개의 기본도형에 관한 문제

바른6면체, 공간4각형은 공간에서의 기본도형이다.

이 기본도형들의 점, 선, 면사이의 관계는 공간기하의 기본개념을 파악하는데서 매우 중요하다.

[례1] 바른6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$의 모서리의 길이가 a일 때 다음 것을 구하여라.

1) ㄱ. AA_1와 BC_1사이의 각　　ㄴ. A_1B와 B_1C사이의 각

ㄷ. BD와 AC_1사이의 각　　ㄹ. BD_1와 AC사이의 각

ㅁ. BC_1와 평면 ACC_1A_1사이의 각

ㅂ. BD_1와 평면 BCC_1B_1사이의 각

2) ㄱ. AA_1와 BC_1사이의 거리　　ㄴ. A_1B_1와 BC_1사이의 거리

ㄷ. DB와 B_1C사이의 거리　　ㄹ. B_1로부터 CC_1A_1까지의 거리

ㅁ. B_1로부터 A_1BC_1까지의 거리

(설명) (그림 2-10)

1) ㄱ. $AA_1//BB_1$이므로 $\angle B_1BC_1=45^\circ$가 구하려는 각이다.

ㄴ. $A_1D//B_1C$이므로 $\angle DA_1B$가 구하려는 각이다.

A_1BD는 바른3각형이므로 $\angle DA_1B=$ $=60^\circ$이다.

그림 2-10

ㄷ. BD_1과 AC_1는 서로 사귀는데 그 사귐점을 M이라고 하면 △MAB에서 AB=a,

$MA=MB=\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로

$\angle AMB=2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$

(또는 $\arccos\frac{1}{3}$)

∴ BD_1과 AC_1가 이루는 각은　　$2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$

$2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\pi-2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$

ㄹ. $DD_1\perp$평면 ABCD, $DB\perp AC$이므로 $D_1B\perp AC$
즉 BD_1와 AC사이의 각은 90°이다.

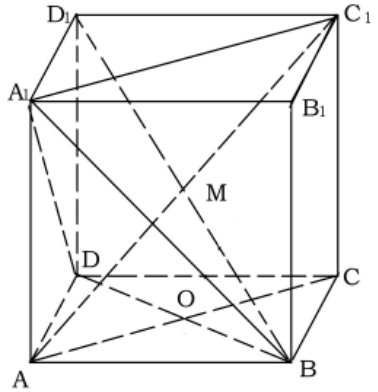
ㅁ. $BD\perp AC$, $BD\perp AA_1$이므로 $BD\perp$평면 ACC_1A_1

AC⊥BC={O}라고 하면 ∠BC_1O는 BC_1와 평면 ACC_1A_1가 이루는 각이다.

그림 2-11

직3각형 BOC_1에서 $BO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

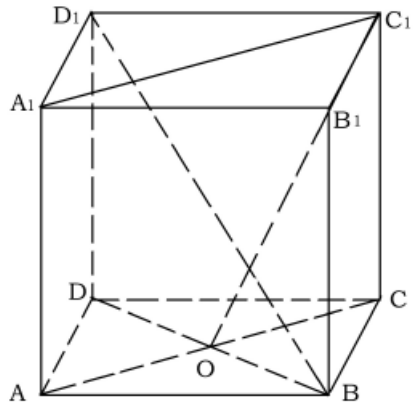
$BC_1=\sqrt{2}a$ 이므로 $\angle BC_1O=30^\circ$

(다른 방법)

$BC_1=DC_1$, DO=BO이므로

$\angle BC_1O=\frac{1}{2}\angle BC_1D=\frac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ$

ㅂ. D_1C_1⊥평면 BCC_1B_1이므로 $\angle D_1BC_1$는 BD_1과 평면 BCC_1B_1가 이루는 각이다.

즉 $\angle D_1BC_1=\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) ㄱ. AB⊥AA_1와 AB⊥BC_1이므로 AB가 AA_1와 BC_1사이의 거리이다. (그림 2-11)

AB= a

ㄴ. $B_1C\perp A_1B_1$, $B_1C\perp BC_1$이므로 $B_1C\cap BC_1=\{O\}$이라고 하면 B_1O가 구하려는 거리이다.

$$B_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

ㄷ. 평면 A_1DB//평면 CB_1D_1이므로 두 평면사이의 거리를 구하면 된다. (그림 2-12)

D_1에서 평면 A_1DB까지 거리를 h라고 하면

$V_{D_1-A_1DB}=V_{B-A_1D_1D}$ 이므로 $\frac{1}{3}hS_{\triangle A_1BD}=\frac{1}{3}aS_{\triangle A_1D_1D}\Rightarrow\ h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

ㄹ. $B_1O\perp A_1C_1$, $B_1O\perp C_1C$ 이므로 B_1O⊥평면 A_1CC_1이다.

따라서 B_1O가 구하려는 거리이다.

$$B_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

ㅁ. $\triangle A_1BC_1$가 바른3각형이고 $B_1A_1=B_1C_1=B_1B$이므로 B_1의 $\triangle A_1BC$에 대한 사영 H는 $\triangle A_1BC$의 무게중심이다.

따라서 B_1H는 구하려는 거리이다. (그림 2−13)

$$B_1H = BB_1 \sin\angle B_1BO = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

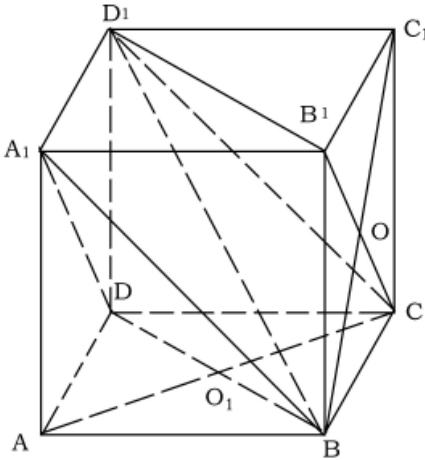



그림 2−12

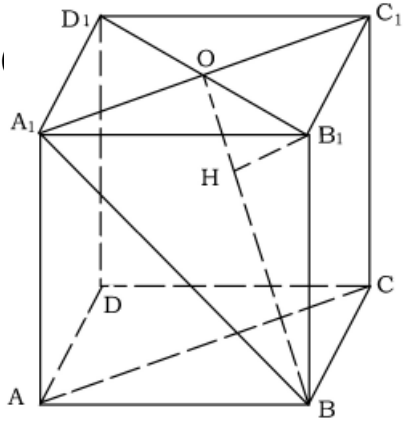



그림 2−13

(다른 방법)

B_1에서 평면 A_1BC_1까지의 거리를 h라고 하면

$$V_{B_1-A_1BC_1} = V_{B-A_1B_1C_1} \qquad \therefore\ \frac{1}{3}hS_{\Delta A_1BC_1} = \frac{1}{3}aS_{\Delta A_1B_1C_1} \ \Rightarrow\ h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

[례2] 공간4각형 ABCD에서 AB, BC, CD, DA우의 점들을 각각 E, F, G, H라고 할 때

1) AB와 FG가 어긴다는것을 증명하여라.

2) EH와 FG의 사귐점을 O라고 할 때 O는 BD우에 있다.

3) E, F, G, H가 각각 가운데점이면 BD//평면 EFGH, AC//평면 EFGH

4) AB=BC=a, AD=DC=b, BD=m, $\angle ADC=\alpha$일 때 AC⊥BD임을 증명하고 평면 ABC와 평면 ADC가 이루는 2면각의 크기를 구하여라. (그림 2−14)

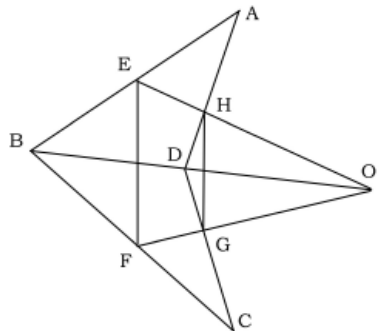



그림 2−14

(설명)

1) 만일 AB와 FG가 어기는 직선이 아니라고 하자.

AB와 FG가 한 평면 α에 있다고 하면 A, B, F, G$\in\alpha$이다.

B, F, G가 결정하는 평면은 BDC이므로 α는 평면 BDC와 일치한다.

∴ A∈평면 BDC

이것은 ABCD가 공간4각형이라는데서 모순된다.

2) EH∩FG={O}라고 하면 O∈EH, O∈평면 ABD, O∈FG,

O∈평면 BDC이므로 O는 평면 ABD와 평면 BDC의 공통점이다.

∴ O∈BD

3) E, F, G, H가 각각 AB, BC, CD, DA의 가운데점이므로

EH//BD, FG//BD, EF//AC, HG//AC

∴ EFGH는 평행4변형이다.

즉 BD//평면 EFGH, AC//평면 EFGH

4) (그림 2−15) AC의 가운데점을 M이라고 하면 BM⊥AC, DM⊥AC이므로 AC⊥평면 BDM이다.

∴ AC⊥BD

∠DMB는 평면 ABC와 평면 ADC가 이루는 2면각의 평면각이다.

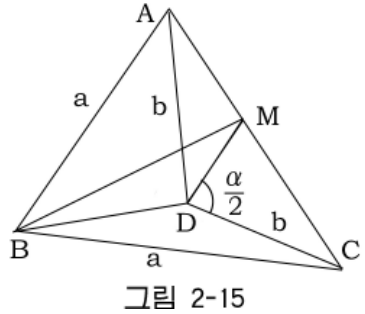
그림 2-15

AM$=b\sin\frac{\alpha}{2}$이므로

$$BM=\sqrt{a^2-AM^2}=\sqrt{a^2-b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

DM$=b\cos\frac{\alpha}{2}$, $BD=m$이므로 △BDM에서

$$\cos\angle BMD=\frac{DM^2+BM^2-BD^2}{2BM\ \ DM}=\frac{b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+a^2-b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-m^2}{2\sqrt{a^2-b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\ \ b\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\therefore\ \ \angle BMD=\mathrm{arccon}\frac{b^2\cos\alpha+a^2-m^2}{2b\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{a^2-b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

귀유법을 리용하는 문제

[례1] 직선 a와 평면 α가 평행이고 $A \in \alpha$일 때 A를 지나며 a에 평행인 직선은 반드시 평면 α에 놓인다는것을 증명하여라.

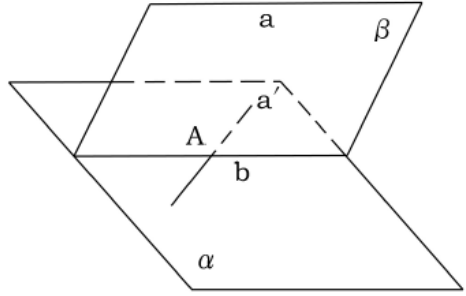
그림 2-16

(설명) 점 A를 지나며 a에 평행인 직선 a′가 α에 놓이지 않는다고 하자. (그림 2-16)

$a // \alpha$이므로 a와 점 A가 결정하는 평면을 β라고 하자.

α와 β가 점 A를 지나는 직선 b에서 사귄다고 하면 $a // b$이다.

그러므로 점 A를 지나는 두 직선 a′, b는 a에 평행이다.

이것은 한 점을 지나며 한 직선에 평행인 직선은 하나밖에 없다는데 모순된다. 따라서 점 A를 지나며 a에 평행인 직선은 α에 있다.

[례2] 직선 a가 평면 α와 수직이면 점 A에서 사귄다. 직선 b도 평면 α와 수직이며 점 B에서 사귄다. 이때 $a // b$임을 증명하여라. (그림 2-17)

(설명) 만일 a와 b가 평행이 아니라고 하자.

그림 2-17

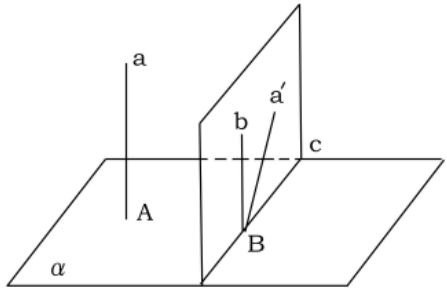
점 B를 지나며 a에 평행인 직선을 a′라고 하고 a′와 b가 결정하는 평면을 β, $\alpha \cap \beta = BC$라고 하자.

$a \perp \alpha$이므로 $a' \perp \alpha$

$\therefore a' \perp BC$

한편 조건에 의하여 $b \perp BC$이다.

이것은 평면의 한 점을 지나며 그 평면에 수직인 직선은 하나밖에 없다는데 모순된다.

$\therefore a // b$

[례3] 한 점을 지나며 주어진 직선에 수직인 평면은 한개밖에 없다는것을 증명하여라.

(설명) $A \in \alpha$, $a \perp \alpha$인 평면 α가 하나뿐이라는것을 증명하면 된다. (그림 2-18)

그림 2-18

먼저 $A \in a$인 경우를 보자.

이제 이러한 평면 β가 또 있다고 하자.

즉 $A \in \beta$, $a \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = b$

직선 a를 지나는 평면을 γ라고 할 때 $\gamma \cap \alpha = m$, $\gamma \cap \beta = n$이라고 하자.

$a \perp \alpha$이므로 $a \perp m$,

$\alpha \perp \beta$이므로 $a \perp n$

결국 한 평면 γ에서 점 A를 지나며 a에 수직인 직선이 두개 있는것으로 되는데 이것은 불가능하다.

∴ 조건에 맞는 평면 α는 하나뿐이다.

$A \notin a$인 경우에도 마찬가지로 증명된다.

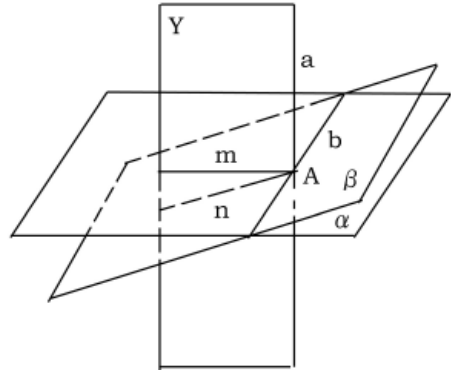



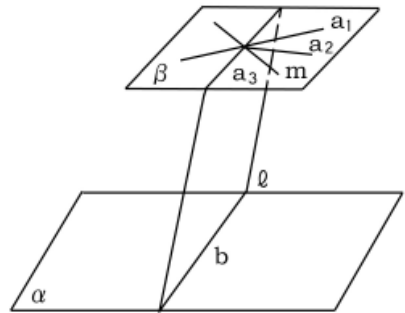
그림 2-19

[례4] 한 점을 지나며 한 평면에 평행인 모든 직선들은 이 점을 지나며 그 평면에 평행인 평면우에 놓인다는것을 증명하여라.

(설명) 주어진 점을 A, 주어진 평면을 α라고 할 때 $A \notin \alpha$이다.

이제 점 A를 지나며 평면 α에 평행인 직선들을 a_1, a_2, a_3, … 라고 할 때 이것들이 점 A를 지나며 평면 α에 평행인 평면 에 놓인다는것을 밝히면 된다. (그림 2-19)

$a_1 \cap a_2 = \{A\}$로 놓으면 a_1와 a_2은 한 평면 β를 결정한다.

$a_1 // \alpha$, $a_2 // \alpha$이므로 $\alpha // \beta$이다.

이제 $a_3 \not\subset \beta$라고 하자. a_3을 지나며 평면 α와 b에서 사귀는 평면을 γ라고 하자.

$\beta \cap \gamma = $m이라고 하면 $\alpha // \beta$이므로 a_3//b, b//m

이것은 한 평면 γ에 있으며 점 A를 지나는 직선 a_3, m이 모두 직선 b에 평행이라는것을 보여준다. 이것은 불가능하다.

$\therefore$ $a_3 \subset \beta$

마찬가지로 $a_4, a_5, \cdots$들도 모두 평면 β에 놓인다는것을 설명할수 있다.

[례5] 한 직선이 평행인 두 평면가운데 어느 하나와 사귀면 다른 평면과도 사귄다는것을 증명하여라.

(설명) 주어진 직선을 a, 평행인 두 평면을 α, β라고 할 때 $a \cap \alpha = \{A\}$라고 하자. 만일 a와 β가 사귀지 않는다고 하면 $a \subset \beta$ 또는 $a // \beta$이다.

한편 $a \subset \beta$이면 A$\in \beta$로 되는데 이것은 $\alpha // \beta$에 모순된다.

만일 $a // \beta$라고 하자. a를 지나며 평면 α와 b에서 사귀는 평면 γ를 생각하면 b//β이다.

$a \cap$b$=\{$A$\}$이므로 $\gamma // \beta$

이것은 점 A를 지나는 두 평면 α와 γ가 β에 평행임을 보여준다. 이것은 불가능하다.

$\therefore$ 직선 a와 β는 사귄다.

각에 관한 문제

공간기하에서 가장 중요한 각은 세가지 즉 어기는 두 직선이 이루는 각, 평면의 빗선과 그 평면이 이루는 각(선면각), 2면각의 평면각이다.

2면각의 평면각을 구하는 방법에는 두가지가 있다.

① 2면각의 평면각을 그리고 3각형을 리용하여 구하는 방법

2면각의 평면각을 그리는 방법은 세가지이다.

ㄱ) 정의에 의하여 그리기

2면각의 모서리의 한 점을 잡고 이 점을 지나며 두 면에 놓이며 모서리에 수직인 직선을 그리면 그 두 수직선사이의 각이 평면각

이다.

ㄴ) 세 수직선의 정리를 리용하는 방법

ㄷ) 특수한 평면도형의 성질을 리용하는 방법

2등변3각형 또는 바른3각형의 성질을 리용한다.

② 공식 $\cos\alpha = \frac{S'}{S}$ 를 리용하는 방법

α가 2면각의 평면각이고 S가 2면각의 한 면에 놓여있는 평면도형의 면적이며 S′가 이 도형의 다른 면에 대한 사영의 면적일 때 $\cos\alpha = \frac{S'}{S}$ 이다.

[례1] 직4각형 ABCD가 있다. OA⊥평면 ABCD, OA=1, OD와 밑면 ABCD가 이루는 각이 30°, OB와 CD가 이루는 각은 45°이다. 이때 다음것을 구하여라. (그림 2－20)

1) 평면 OCD와 평면 ABCD가 이루는 각

2) 평면 OBD와 평면 ABCD가 이루는 각

(설명) 주어진 조건으로부터

∠OBA=45°, ∠ODA＝30°,

OA＝1이므로 AB＝1, AD＝$\sqrt{3}$

1) OA⊥평면 ABCD, AD⊥DC이므로 OD⊥DC이다.

∴ ∠ODA＝30°가 구하려는 각이다.

2) 점 A에서 BD에 그은 수직선의 밑점을 E라고 하면 OE⊥BD이므로 ∠AEO가 구하려는 각이다.

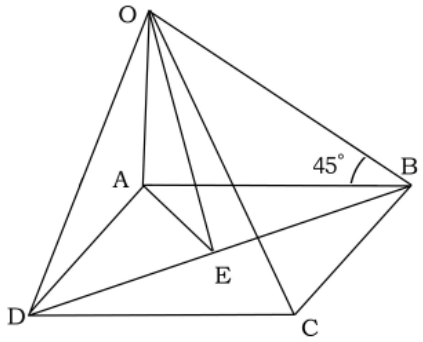



그림 2－20

직3각형 ABD에서 $AE = \frac{AD\ \ AB}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\angle AEO = \frac{2}{\sqrt{3}}$

∴ $\angle AEO = \arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$

[례2] ∠ASC＝∠BSC＝30°, ∠ASB＝45°인 세 반직선 SA, SB, SC가 있다. 평면 ASC와 평면 BSC가 이루는 2면각의 크기를 구하여라. (그림 2－21)

(설명) 모서리 SC우에 한 점 E를 정하고 E에서 SC에 수직인 직선이 SA, SB와 사귀는 점을 M, N이라고 하자.

그러면 2면각의 평면각의 정의로부터 ∠MEN이 평면 ASC와 평면 BSC가 만드는 2면각의 평면각이다.

∠ASC＝∠BSC＝30°이므로 ME＝NE이다.

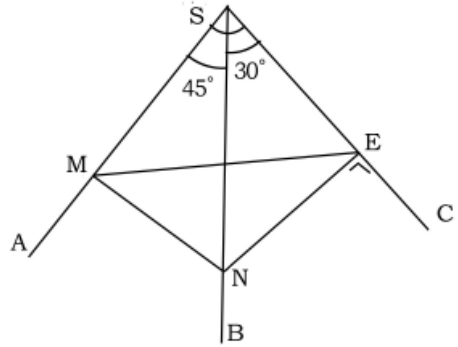



그림 2-21

SM＝SN＝a로 놓으면

NE＝ME＝$\frac{a}{2}$

△SMN에서 $MN^2=a^2+a^2-2a^2\cos 45^\circ$

△MNE에서 $MN^2=ME^2+NE^2-2ME\times NE\times\cos\angle MEN$

∴ $\cos\angle MEN=2\sqrt{2}-3$

즉 구하려는 각은 arcos($2\sqrt{2}-3$)

[례3] 4면체 ABCD에서 BD＝$\sqrt{2}$이고 나머지 모서리들의 길이는 다 a이다. 이때 다음것을 구하여라. (그림 2－22)

1) 2면각 A－BD－C의 크기

2) 2면각 B－AC－D의 크기

3) 2면각 A－BC－D의 크기

그림 2-22

(설명)

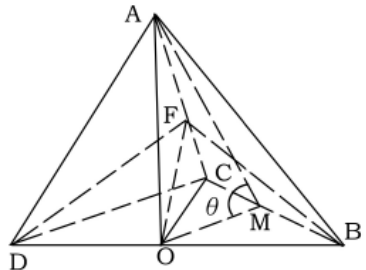
1) BD의 가운데점을 O라고 하자.

AD＝AB＝DC＝BC＝a, BD＝$\sqrt{2}a$이므로

AO⊥BD, CO⊥BD, ∠DAB＝90°,

∠DCB＝90°

∴ ∠AOC가 2면각 A－BD－C의 크기이다.

△AOC에서 AC＝a, AO＝OC＝$\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\therefore\ \angle AOC = 90^\circ$

2) AC의 가운데점을 F라고 하면 DF⊥AC, BF⊥AC, $DF = BF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\therefore\ \angle BFD$가 2면각 B−AC−D의 크기이다.

DOF에서 $DF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $DO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\therefore\ \sin(\frac{1}{2}\angle BFD) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $\angle BFD = 2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$

3) AO⊥DB, AO⊥OC이므로 AO⊥평면 BCD, O를 지나 BC에 그은 수직선의 밀점을 M이라고 하면 AM⊥BC

$\therefore\ \angle AMO$가 2면각 A−BC−D의 크기이다.

직3각형 AOM에서 $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $OM = \frac{1}{2}DC = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ \angle AMO = \arctan\sqrt{2}$

다른 방법; AO⊥평면 BCD이므로 평면 ABC의 평면 BCD에 대한 사영은 평면 OBC이다.

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

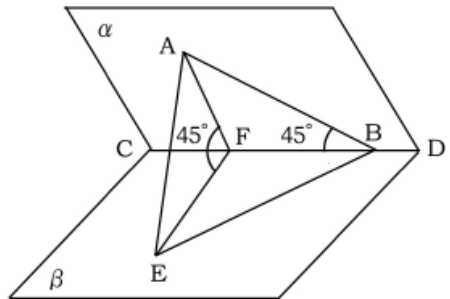
즉 $\angle AMO = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

[례4] 2면각 α−CD−β의 크기는 45°이다. A는 평면 α에, B는 CD에 있고 $\angle ABC = 45^\circ$이다. AB와 평면 β가 이루는 각을 구하여라. (그림 2−23)

그림 2−23

(설명) A에서 β에 내린 수직선의 밀점을 E, E에서 CD에 그은 수직선의 밀점을 F라고 하면

AF⊥CD

$\therefore\ \angle AFE$가 α−CD−β의 평면

각이다.

$\angle$AFE＝45°이고 $\angle$ABE는 AB와 β가 이루는 각이다.

AE＝a라고 하면 AF＝$\sqrt{2}a$

$\therefore$ AB＝$2a$

직3각형 AEB에서 $\angle$ABE=30°

즉 AB와 평면 β가 이루는 각은 30°이다.

[례5] 4면체 OABC에서 OA, OB, OC는 둘씩 서로 수직이다.

$\angle$OBA＝45°, $\angle$OBC＝60°, M이 AB의 가운데점일 때 다음것을 구하여라. (그림 2－24)

1) BC와 평면 OAB가 이루는 각

2) OC와 평면 ABC가 이루는 각

3) 2면각 M－OC－B의 크기

그림 2－24

(설명) OC⊥OA, OC⊥OB이므로 OC⊥평면 OAB

1) $\angle$OBC는 BC와 평면 OAB가 이루는 각이다.

$\angle$OBC＝60°

2) OA⊥OB, $\angle$ABO＝45°

M이 AB의 가운데점이므로

OM⊥AB

$\therefore$ MC⊥AB

즉 AB⊥평면 OMC,

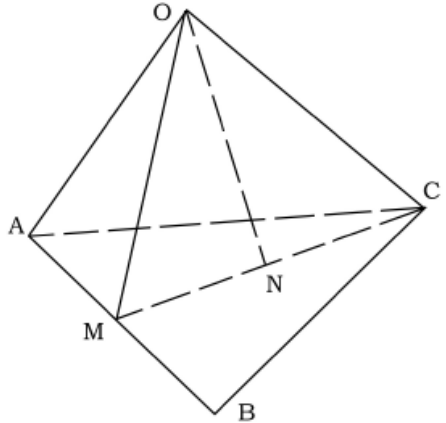
평면 ABC⊥평면 OMC

O에서 MC에 그은 수직선의 밑점을 H라고 하면 OH⊥평면 ABC

$\therefore$ $\angle$OCM이 OC와 평면 ABC가 이루는 각이다.

OA＝a라고 하면 OM＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, OB＝a, OC＝$\sqrt{3}a$,

$$\tan\angle OCM=\frac{OM}{OC}=\frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\therefore\ \angle \text{OCM}=\arctan\frac{\sqrt{6}}{6}$$

3) OC⊥평면 OAB이므로 OC⊥OM이다.

또한 OC⊥OB이므로 ∠MOB가 2면각 M−OC−B의 평면각이다.

∠MOB＝45°

거리에 관한 문제

① 점과 점사이의 거리

두 점을 맺는 선분의 길이인데 보통 3각형을 리용하여 구한다.

② 점과 선사이의 거리

점에서 직선에 그은 수직선의 길이인데 보통 세 수직선에 관한 정리를 리용한다.

③ 점과 면사이의 거리

점에서 평면에 내린 수직선의 길이인데 이것을 구하는 방법에는 세가지가 있다.

그림 2−25

ㄱ. 평면에 대한 점의 사영점을 얻고 점과 사영점사이의 거리를 구한다.

ㄴ. 체적이 같다는것을 리용한다.

그림 2−25에서 $V_{A-BCD}=V_{B-ACD}$

도형을 몇개의 부분으로 나누고 그것을 합한것이 처음 도형과 같다는것을 리용한다. 그림 2−26에서 H가 도형안의 한 점이면

$V_{A-BCD}=V_{H-ACD}+V_{H-ABD}+V_{H-ABC}+V_{H-BCD}$

④ 평면에 평행인 직선과 평면사이의 거리

직선의 한 점에서 평면까지의 거리이다.

⑤ 평행인 두 평면사이의 거리

한 평면의 한 점에서 평면까지의 거리이다.

⑥ 어기는 두 직선사이의 거리 (그림 2−27)

공통수직선의 길이인데 네가지방법이 있다.

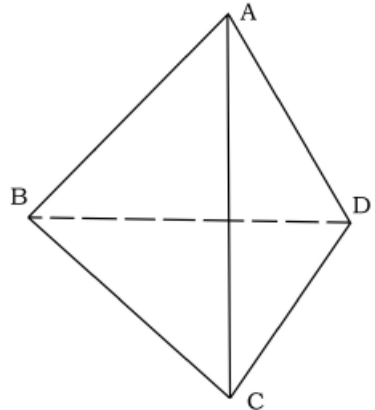
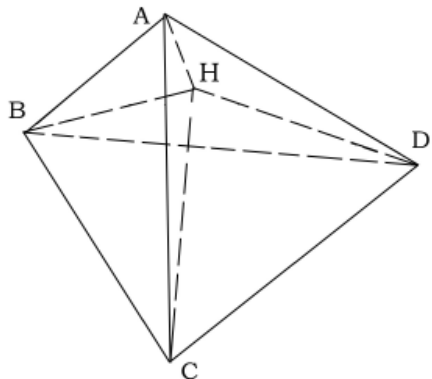



그림 2−26

ㄱ. 정의에 의하여 어기는 두 직선사이의 거리를 그리고 구한다.

ㄴ. 보조평면을 리용한다.

· 어기는 직선가운데서 한 직선을 지나며 다른 직선에 평행인 평면을 그리면 어기는 두 직선사이의 거리는 직선과 평면사이의 거리 또는 직선우의 점으로부터 평면까지의 거리로 된다.

그림 2-27

· 두개의 어기는 직선들을 각각 지나며 다른 직선에 평행인 평면을 그리면 어기는 두 직선사이의 거리는 평행인 두 평면사이의 거리로 된다.

· 어기는 두 직선이 서로 수직일 때에는 한 직선을 지나며 다른 직선에 수직인 평면을 그리면 어기는 두 직선사이의 거리는 점에서 직선까지의 거리로 된다.

ㄷ. 두 어기는 직선사이의 거리공식을 리용한다.

어기는 두 직선 a, b사이의 각을 θ, 그것들의 공통수직선 AA′의 길이를 d, 직선 a에 A′E=m인 점 E를, 직선 b에 AF=n인 점 F를 정하였을 때 EF=$\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}$ 이다.

여기서 E, F가 AA′에 관하여 한쪽에 있을 때 《－》부호를, 다른쪽에 있을 때 《＋》부호를 취한다.

[례1] 평행4변형 ABCD에서 AB=a, BC=b, ∠ABC=α, OD⊥평면 ABCD, OD=m일 때 다음것을 구하여라. (그림 2－28)

1) O에서 BC까지의 거리

2) O에서 AC까지의 거리

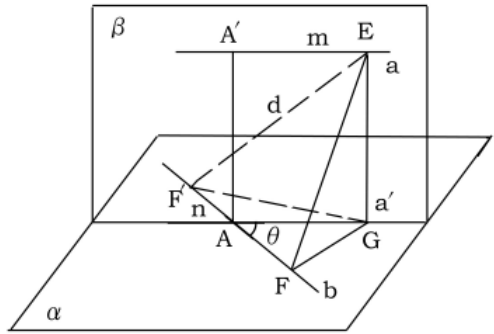
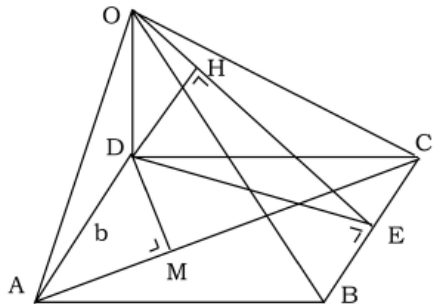
3) D에서 평면 OBC까지의 거리

(설명)

그림 2－28

1) D에서 BC에 그은 수직선의 밑점을 E라고 하면 OD⊥평면 ABCD이므로 OE⊥BC이다.

즉 OE가 구하려는 거리이다.

DE$=a\sin\alpha$ 이므로 $OE=\sqrt{m^2+a^2\sin^2\alpha}$

2) D에서 AC에 그은 수직선의 밑점을 M이라고 하면 OD⊥평면 ABCD 이므로 OM⊥AC이다.

즉 OM이 구하려는 거리이다.

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ 이므로

$$DM = \frac{\frac{1}{2}ab\sin\alpha}{\frac{1}{2}AC} = \frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}$$

$$OM = \sqrt{m^2 + \frac{a^2b^2\sin^2\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}$$

3) D에서 OE에 그은 수직선의 밑점을 H라고 할 때 BC⊥OD, BC⊥DE이므로 BC⊥평면 OBC이다. 따라서 평면 ODE⊥평면 OBC이며 DH⊥평면 OBC이다.

즉 DH가 구하려는 거리이다.

$$DH = \frac{OD \quad DE}{OE} = \frac{ma\sin\alpha}{\sqrt{m^2 + a^2\sin^2\alpha}}$$

［례2］ 1) 모서리가 a인 바른6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 B_1로부터 평면 A_1BC_1까지의 거리를 구하여라.(그림 2－29)

2) 바른4각뿔 P－ABCD에서 밑면의 변의 길이는 a, 옆면과 밑면사이의 각은 60°이다. AD의 가운데점 M으로부터 평면 PBC까지의 거리를 구하여라.(그림 2－30)

3) 바른4면체 ABCD에 내접한 구의 중심을 M, AB＝a일 때 구의 반경을 구하여라.

(설명)

1) $A_1B = BC_1 = A_1C_1$, $B_1A_1 = B_1C_1 = B_1B$

∴ B_1의 평면 A_1BC_1에 대한 사영 H는 $\triangle A_1BC_1$의 무게중심이다.

$\angle B_1BH = \mathrm{arctin}\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $B_1H = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

다른 방법; 점 B_1로부터 A_1BC_1까지의 거리를 h라고 하면

$$V_{B_1-A_1BC_1} = V_{B-A_1B_1C_1}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}h \ \frac{\sqrt{3}}{4} \ (\sqrt{2}a)^2 = \frac{1}{3}a\frac{1}{2}a^2, \qquad 즉 \quad h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

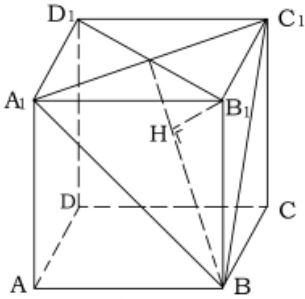



그림 2-29

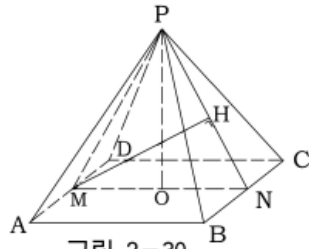



그림 2-30

2) BC의 가운데점을 N이라고 하자. 그러면 BC⊥MN, BC⊥PN이므로 BC⊥평면 PMN, ∠PNM=60°이다. M을 지나며 PN에 그은 수직선의 밑점을 H라고 하면 MH는 M으로부터 평면 PBC까지의 거리이다.

직3각형 MHN에서 MH=MN · sin60°=sin$\frac{\sqrt{3}}{2}a$

다른 방법; M으로부터 평면 PBC까지의 거리를 h라고 하면

PN=a, PO=$\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\quad V_{M-PBC} = V_{P-MBC}$ 이므로

$$\frac{1}{3}h(\frac{1}{2}a^2) = \frac{1}{3} \ \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{1}{2}a^2 \quad \therefore \ \mathrm{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

3) AB=a로부터 4면체의 높이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 이다.

내접구의 반경을 r라고 하면

$V_{A\text{-}BCD} = V_{M\text{-}BCD} + V_{M\text{-}ACD} + V_{M\text{-}ABC} + V_{M\text{-}ABC}$이므로

$$\frac{1}{3} \ \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{1}{3}r(4 \ \frac{\sqrt{3}}{4}a^2) \qquad \therefore \ \mathrm{r} = \frac{\sqrt{6}}{12}a$$

[례3] 모서리의 길이가 a인 바른6면체 ABCD$-A_1B_1C_1D_1$에서 다음것을 구하여라. (그림 2-31)

1) BD_1, AC사이의 거리

2) B_1C_1, BD_1사이의 거리

(설명)

1) $AC \perp BD$, $AC \perp DD_1$이므로

$AC \perp$평면 DBD_1

$\triangle D_1DB$에서 O를 지나 D_1B에 그은 수직선의 밑점을 H라고 하면 OH는 AC와 D_1B사이의 거리이다.

직3각형 D_1DB에서 $OH = \frac{\sqrt{6}}{6}a$

2) $B_1C_1 // BC$이므로 $B_1C_1 //$평면 D_1BC

B_1C_1와 평면 D_1BC사이의 거리는 어기는 직선 B_1C_1와 D_1B사이의 거리이다. B_1로부터 평면 D_1BC까지의 거리를 h라고 하면

그림 2-31

$V_{B_1-D_1BC} = V_{D_1-BB_1C}$ 이므로 $\frac{1}{3}h(\frac{1}{2}a\sqrt{2}a) = \frac{1}{3}a(\frac{1}{2}a^2)$

$\therefore h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

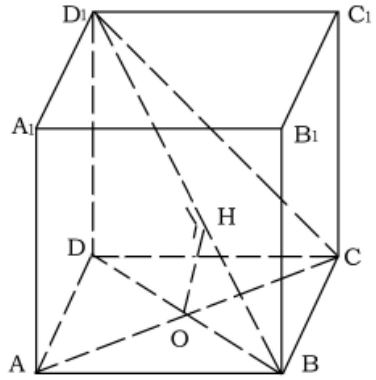
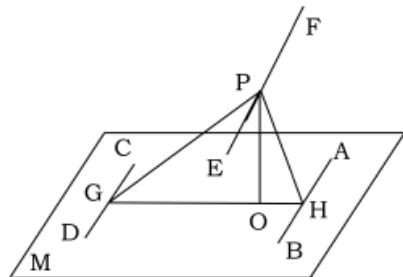
즉 B_1C_1와 BD_1 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 이다.

[례4] AB, CD는 평면 M에 있고 길이가 28㎝이며 서로 평행이다. 평면 M밖에 EF//AB인 선분 EF가 있다. EF와 평면 M사이의 거리는 15㎝, EF와 AB사이의 거리는 17㎝이다. EF와 CD사이의 거리를 구하여라.(그림 2-32)

그림 2-32

(설명) ㄱ. EF의 평면 M에 대한 사영이 AB, CD사이에 있을 때 EF의 한 점 P에서 M에 그은 수직선의 밑점을 O라고 하면 PO=15이다.

O에서 AB에 AB, CD에 그은 수직선의 밑점을 각각 G, H라고 할 때 CD//AB이므로 $GH \perp CD$

GH=28이고 세 수직선의 정리로부터 $PH \perp AB$, $PG \perp CD$

$\therefore PH = 17$

직3각형 POH에서 OH=8이므로 GO=20

직3각형 PGO에서 PG=25

∴ EF와 CD사이의 거리는 25㎝이다.

ㄴ. EF의 M에 대한 사영이 AB, CD밖에 있을 때(그림 2−33)

OH=8, PG=$\sqrt{15^2+36^2}=39$

∴ EF와 CD사이의 거리는 39㎝

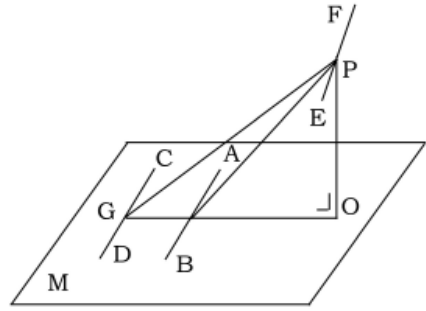



그림 2−33

[례5] 4면체 S−ABC에서 AB=AC, SA⊥SC이고 SA와 SB는 수직이 아니다. S의 평면 ABC에 대한 사영 O는 △ABC의 내심이 아니라는것을 증명하여라.(그림 2−34)

(설명) 만일 S의 평면 ABC에 대한 사영 O가 △ABC의 내심이라고 하자.

AO의 연장선이 BC와 사귀는 점을 D라고 할 때 AB=AC이므로 D는 BC의 가운데점이다.

그림 2−34

∴ AD⊥BC, SD⊥BC이므로

BC⊥평면 SAD

즉 BC⊥SA

또한 SA⊥SC이므로

SA⊥평면 SBC

∴ SA⊥SB 이것은 조건에 모순된다.

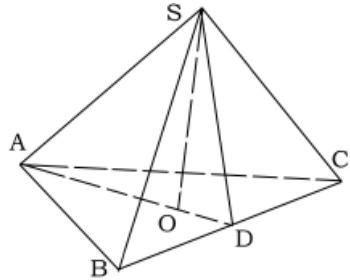
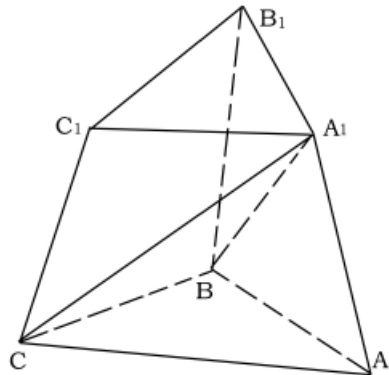
∴ O는 △ABC의 내심이 아니다.

[례6] 3각뿔대 $A_1B_1C_1-ABC$에서 BB_1⊥밑면 ABC, $\angle ABC=\angle AA_1C=\frac{\pi}{2}$, $AB=2A_1B_1=2$㎝일 때

1) $BC\perp A_1B$, $BC\perp AA_1$,

그림 2−35

$AA_1 \perp A_1B$임을 증명하여라. (그림 2－35)

2) 직선 AA_1와 BC사이의 거리를 구하여라.

(설명) 1) $BB_1 \perp$밑면 ABC이므로 $BC \perp BB_1$

또한 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$이므로 $BC \perp AB$

$\therefore$ $BC \perp$평면 BAA_1B_1

즉 $BC \perp A_1B$, $BC \perp AA_1$

또한 $BC \perp$평면 BAA_1B_1이므로 $AA_1 \perp BC$

$\angle AA_1C = \frac{\pi}{2}$이므로 $AA_1 \perp$평면 A_1CB

$\therefore$ $AA_1 \perp A_1B$

2) $A_1B \perp AA_1$, $A_1B \perp BC$이므로 A_1B가 구하려는 거리이다.

직각사다리형 B_1BAA_1에서

$\triangle A_1B_1B \backsim \triangle BA_1A$이므로

$\frac{A_1B_1}{A_1B} = \frac{A_1B}{AB}$ 즉 $\frac{1}{A_1B} = \frac{A_1B}{2}$

$\therefore$ $A_1B = \sqrt{2}$

즉 어기는 두 직선 AA_1와 BC사이의 거리는 $\sqrt{2}$ ㎝이다.

련습문제

1. 평면밖의 한 직선의 두 점으로부터 그 평면까지의 거리가 서로 같으면 이 직선과 평면의 자리관계는 ( )이다.

① 평행 ② 사귐 ③ 직선이 평면에 놓임 ④ 평행 또는 사귐

2. 다음의 명제들가운데서 옳은것은 ( )이다.

① 직선 a//평면 M, 직선 b⊥직선 a이면 직선 b⊥평면 M이다.

② 두 평면 M과 N이 평행이면 평면 M의 임의의 직선 b는 평면 N에 평행이다.

③ 두 평면 M과 N, 두 직선 a, b에 대하여 $M \cap N = a$, $b \subset M$, $b \perp a$이면 $b \perp N$이다.

④ 평면 N에 놓여있는 직선이 모두 평면 M에 평행이면 M과 N은 평행이다.

3. β, α를 겹치지 않는 두 평면, ℓ과 m을 겹치지 않는 두 직선이라고 할 때 $\alpha // \beta$이기 위한 하나의 충분조건은 (　)이다.

① $\ell \subset \alpha$, $m \subset \alpha$, $\ell // \beta$, $m // \beta$

② $\ell \subset \alpha$, $m \subset \beta$, $\ell // m$

③ $\ell \perp \alpha$, $m \perp \beta$, $m // \ell$

④ $\ell // \alpha$, $m // \beta$, $\ell // m$

4. 평면밖의 한 점 D를 지나면서 ( ) 존재한다.

① 주어진 평면에 수직인 직선은 무수히 많이

② 주어진 평면에 평행인 평면은 무수히 많이

③ 주어진 평면에 평행인 평면은 한개만

④ 주어진 평면에 수직인 평면은 한개만

5. 두 직선이 평행이기 위한 하나의 충분조건은 ( )이다.

① 한 직선에 동시에 수직이다.

② 한 평면에 동시에 평행이다.

③ 두 평행인 평면에 각각 수직이다.

④ 한 평면과 이루는 각이 같다.

6. 두 직선 ℓ과 m은 서로 어기는 두 직선이고 그 사이각은 60°이다. 다음의 명제들가운데서 옳은 명제의 개수는 ( )이다.

① ℓ을 지나며 m에 평행인 평면 α는 늘 그릴수 있다.

② ℓ을 지나며 m에 수직은 평면 α는 늘 그릴수 있다.

③ ℓ과 m을 각각 지나는 평면 α와 β를 그 사이각이 60°가 되게 그릴수 있다.

④ ℓ을 지나며 m과 이루는 각이 60°인 평면를 그릴수 있다.

① 1,　　② 2,　　③ 3,　　④ 4

7. 평면밖의 한 점에서 평면에 내린 수직선과 몇개의 빗선들이 있다. 그 빗선들이 평면과 이루는 각들이 모두 같을 때 다음의 명제들가운데서 옳은것은 ( )이다.

① 수직선의 밑점은 빗선의 밑점들을 정점으로 하는 다각형의 외접

원의 중심이다.

② 수직선의 밑점은 빗선의 밑점들을 정점으로 하는 다각형의 내접원의 중심이다.

③ 빗선의 밑점들은 한 바른다각형의 정점이다.

④ 수직선의 밑점은 빗선의 밑점들을 정점으로 하는 다각형의 수심이다.

8. 직선 a는 평면 β에 있고 직선 ℓ과 평면 β는 사귀며 평면 β에 대한 ℓ의 사영은 m이다. 이때 $a\perp\ell$은 $a\perp m$이기 위한 ( )이다.

① 충분조건이나 필요조건은 아닌것

② 필요충분조건

③ 필요조건이나 충분조건은 아닌것

④ 충분조건도 필요조건도 아닌것

9. 주어진 평면밖에 임의의 두 점이 있다. 매 점을 지나며 이 평면에 평행인 직선을 그었는데 이 두 직선이 이루는 각이 주어진 각 θ이다. 이러한 그리기는 ( )이다.

① 늘 가능하다. ② 가능한 때가 있다.

③ 불가능하다. ④ 특수한 θ의 값에 대하여 그릴수 있다.

10. 공간에서 한 각의 두 변까지의 거리가 같은 점들의 모임은 ( )이다.

① 한 반직선, ② 한 직선, ③ 한 반평면, ④ 한 평면

11. 바른6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 AB, BB의 가운데점을 각각 E, F라고 할 때 AE와 CF와 이루는 각은 ( )이다.

① 60°, ② 45°, ③ $\arcsin\frac{2}{5}$, ④ $\arccos\frac{2}{5}$

12. 변의 길이가 ℓ인 바른3각형 ABC에서 BC에 내린 높이가 AD이다. AD를 축으로 하여 3각형을 접어 직2면각을 만들었을 때 A에서 BC까지의 거리는 ( )이다.

① $\sqrt{2}$, ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ③ $\frac{\sqrt{14}}{4}$, ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. 직6면체의 한 대각선이 같은 정점에서 나가는 세 면과 이루는 각이 각각 α, β, γ이면 $\cos^2\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\alpha$의 값은 ( )이다.

① 1, ② $\sqrt{2}$, ③ $\sqrt{3}$, ④ 2

14. 직선 a, b 및 평면 α에 대하여 a와 b가 모두 α에 있지 않다. a, b의 평면 α에 대한 사영을 각각 a′, b′라고 할 때 다음의 명제가운데서 옳은것은 ( )이다.

① a⊥b이면 a′⊥b′이다.
② a⊥b이면 a′⊥b′이다.
③ a//b이면 a′와 b′는 수직이 아니다.
④ a//b이면 a′와 b′는 수직이 아니다.

15. 다음의 명제들가운데서 옳은것은 ( )이다.

① a가 평면 m의 빗선이고 직선 b가 a의 평면 m에 대한 사영에 수직이면 a⊥b이다.
② 직선 b가 평면 m의 빗선 a에 수직이면 b는 평면 m에 대한 a의 사영에 수직이다.
③ 평면 m에 한 직선 b가 있다. 만일 b가 평면 m밖의 한 직선 a에 수직이면 b는 a의 m에 대한 사영에 수직이다.
④ a가 평면 m의 빗선이고 직선 b가 m에 평행이고 a의 m에 대한 사영에 수직이면 a⊥b이다.

16. 한 2면각의 두 반평면이 각각 다른 2면각의 두 반평면에 각각 수직이다. 그러면 이 두 2면각사이의 관계는 ( )이다.

① 서로 같다. ② 서로 보탬각이다.
③ 서로 같거나 보탬각이다. ④ 확정할수 없다.

17. 한 점에서 사귀는 세 직선은 기껏 ( )개의 평면을 결정한다.

18. 한 직선과 두 평면이 이루는 각이 모두 서로 같으면 이 두 평면의 자리관계는 ( )이다.

19. 두 어기는 직선과 서로 사귀는 두 직선의 자리관계는 ( )이다.

20. 공간4각형의 대각선의 길이는 각각 6, 8이고 그것들이 이루는 각은 30°이다. 그러면 매 변의 가운데점을 차례로 맺어서 얻은 평행4변형의 면적은 ( )이다.

21. 공간에 네 점 A, B, C, D가 있다.
DA⊥평면 ABC, 평면 ABD⊥평면 CBD일 때 AB⊥BC임을 증명하여라.

22. 평면 M∩N=AB이고 점 P는 평면 M, N밖에 있다. PC⊥M, PN⊥N일 때 AB⊥CD임을 증명하여라.

23. 모서리가 모두 a인 4면체 ABCD에서 AB와 CD사이의 각과 거리를 구하여라.

24. 한 평면에 놓여있지 않는 네 점 A, B, C, D에 대하여 AB⊥CD, AC⊥BD일 때 다음것을 증명하여라.

① BC⊥AD

② C의 평면 ABD에 대한 사영이 △ABD의 수심일 때 A의 평면 BCD에 대한 사영은 △BCD의 수심임을 증명하여라.

25. 빗선 AB, BC가 평면 M과 각각 α, β의 각을 이루고있다. 빗선의 밑점이 B, C이고 $\angle BAC=90^{\circ}$일 때 AB와 BC의 평면 M에 대한 사영사이의 각을 구하여라.

26. 뾰족3각형 ABC에서 AB<BC이고 V는 △ABC밖에 있다.
VA=VB=VC일 때 2면각 V−AB−C의 크기는 V−BC−A의 크기보다 작다는것을 증명하여라.

27. 평면 M밖의 한 점 P에서 M에 그은 세 빗선의 밑점을 각각 A, B, C라고 할 때 PA, PB, PC가 평면 M과 이루는 각이 각각 α, β, γ이고 $AB=a$, $BC=b$이다. P로부터 평면 M까지의 거리를 구하여라.

28. 직6면체 AC_1에서 $AB=a$, $BC=b$, $BB_1=c$ $(a<b<c)$이다. AB의 가운데점 E를 지나며 대각선 BD_1에 수직인 평면이 BC와 F에서, BB_1과 G에서 사귄다고 할 때 다음것을 구하여라.

① BF와의 길이

② 어기는 직선 D_1B와 EF사이의 거리

29. 두 직선 a, b와 평면 α가 있다. $a\perp b$, $b\perp\alpha$, $a\not\subset\alpha$일 때 $a//\alpha$임을 증명하여라.

30. 2면각 M－CD－N의 크기가 45°이다.

$A\in M$, $B\in CD$, $\angle ABC=45°$일 때 AB와 평면 N이 이루는 각을 구하여라.

31. 공간4각형 ABCD에서 AB＝BC, CD＝DA이고 AD, DC 및 대각선 AC의 가운데점을 각각 E, F, G라고 할 때 평면 BEF⊥BGD임을 증명하여라.

32. 두 바른4각형 ABCD와 ABEF는 크기가 60°인 2면각을 이루고있다. M, N이 각각 대각선 AC와 BF우의 점이고 AM＝FN일 때

① MN//평면 BEC임을 증명하여라.

② 바른4각형의 변의 길이가 $\sqrt{2}$, $AM=FN=0.5$일 때 MN의 길이를 구하여라.

③ 어기는 두 직선 MN과 AB사이의 거리를 구하여라.

33. 모서리의 길이가 a인 바른6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 A_1B_1, B_1C_1의 가운데점을 각각 E, F라고 할 때

① A, C, F, E는 한 평면우에 있다는것을 증명하여라.

② 평면 ACFE와 밑면 ABCD사이의 뾰족각을 구하여라.

34. 2면각 $M-\ell-N$의 한 면 M우에 서로 수직인 직선 AB와 CD가 있다. $AB\cap CD=\{O\}$, A, C는 ℓ우에 있고 AB, CD가 다른 한 면

N과 이루는 각은 각각 α, β이다. 2면각 $M-\ell-N$의 크기가 θ일 때 ($\theta \in (0, \pi/2)$) $Sin^2\theta = Sin^2\alpha + Sin^2\beta$ 임을 증명하여라.

35. 바른6각형 ABCDEF에서 VA⊥바른6각형이다. VA와 바른6각형의 변의 길이가 a일 때 다음것을 구하여라.

① V에서 C, D, E까지의 거리

② AB와 VC가 이루는 각

③ VD와 바른6각형평면이 이루는 각

④ 평면 VBC와 바른6각형면이 이루는 각

답

1. ④ 2. ② 3. ③ 4. ④ 5. ③
6. ③ 7. ① 8. ② 9. ① 10. ③
11. ④ 12. ③
13. ④ 14. ①
15. ④ 16. ④
17. 3 18. 평행 또는 사귐

19. 사귀는 두 직선 또는 어기는 두 직선

20. 6

21. (그림 2−36)에서 BD에 그은 수직선의 밑점을 E라고 하면 평면 ABD⊥평면 CBD이므로 AE⊥평면 BCD

∴ AE⊥BC

또한 AD⊥평면 ABC

∴ AD⊥BC

∴ BC⊥평면 ABD

∴ BC⊥AB

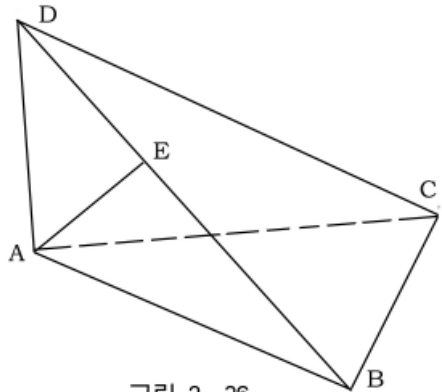



그림 2−36

22. (그림 2－37)에서

PC⊥M, PD⊥N이므로

PC⊥AB, PD⊥AB

∴ AB⊥평면 PCD

즉 AB⊥CD

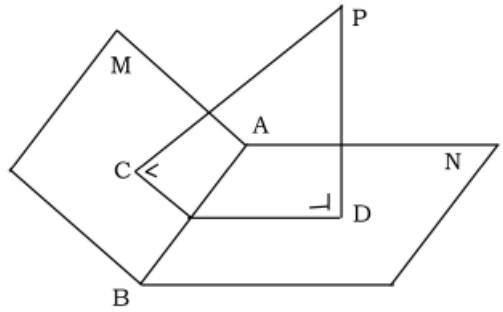



그림 2－37

23. (그림 2－38)에서

CD의 가운데점 E를 취하면

CD⊥△ABE

∴ AB와 CD가 이루는 각은 90°이다.

E에서 AB에 그은 수직선의 밑점을 F라고 하면 EF는 AB와 CD사이의 거리이다.

$$EF = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

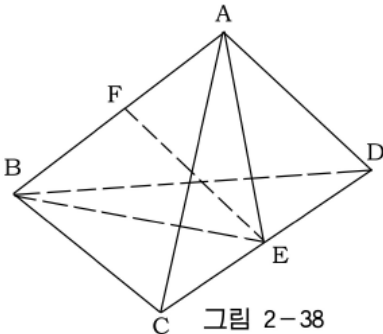



그림 2－38

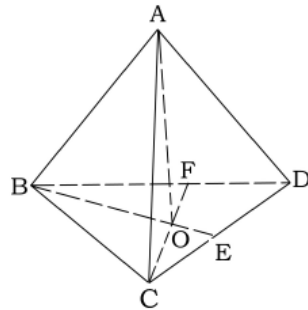



그림 2－39

24. (그림 2－39)에서

① A의 평면 BCD에 대한 사영을 O라고 하면 AB⊥CD이므로 BO⊥CD이다.

AC⊥BD이므로 CO⊥BD이다.

O는 △BCD의 수심이다. ∴ DO⊥BC, AD⊥BC

② 우의 증명으로부터 나온다.

25. (그림 2－40) AB＝a, AC＝b, A의 M에 대한 사영을 O라고

하면 $BO = a\cos\alpha$, $CO = B\cos\beta$, $BC = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\therefore\ \cos\angle BOC = \frac{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta - a^2 - b^2}{2ab\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\therefore\ \angle BOC = \pi - \arccos\frac{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta - a^2 - b^2}{2ab\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

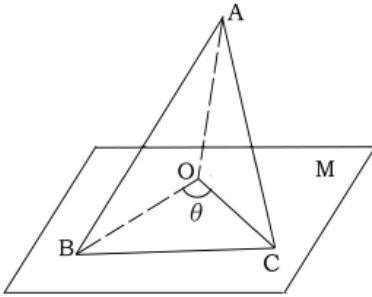



그림 2-40

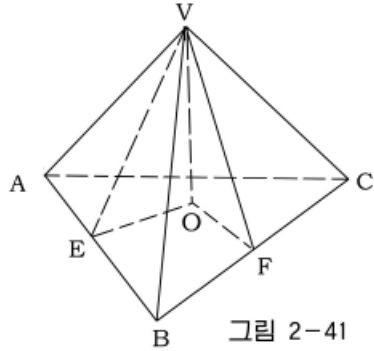



그림 2-41

26. (그림 2－41)의 V에서 평면 ABC에 그은 수직선의 밑점을 O, O에서 AB, BC에 그은 수직선의 밑점을 각각 E, F라고 하면

VE⊥AB, VF⊥BC

∴ ∠VEO, ∠VFO는 각각 2면각 V－AB－C, V－BC－A의 평면각이다.

VA＝VB＝VC이므로 O는 △ABC의 외심이다.

AB＜BC이므로 OE＞OF

$\tan\angle VEO = \frac{VO}{EO}$, $\tan\angle VFO = \frac{VO}{OF}$ $\therefore\ \angle VEO < \angle VFO$

27. (그림 2－42)에서 $AO = x\cot\alpha = CO$, $BO = x\cot\beta$

△AOC에서 cos∠ABO＋cos∠CBO＝0

즉 $$\frac{a^2 + x^2\cot^2\beta - x^2\cot^2\alpha}{2ax\cot\beta} + \frac{b^2 + x^2\cot^2\beta - x^2\cot^2\alpha}{2bx\cot\beta} = 0$$

$$\therefore\ x = \sqrt{\frac{ab}{\cot^2\alpha - \cot^2\beta}}$$

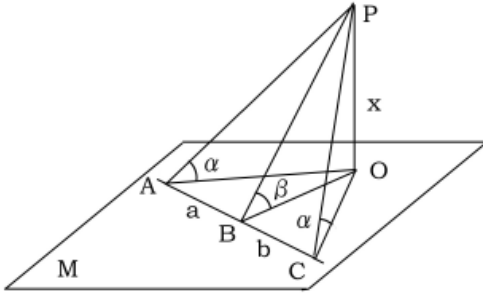



그림 2-42

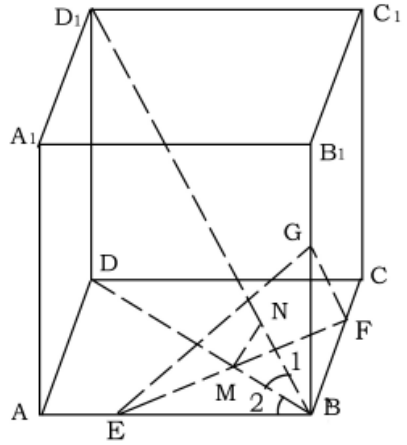



그림 2-43

28. 1) (그림2-43) BD_1⊥평면 EFG이므로 $BD_1 \perp EF$

∴ $BD \perp EF$

직4각형 ABCD에서 $\angle 1 = \angle 2$ ∴ $\triangle EBF \backsim \triangle DAB$

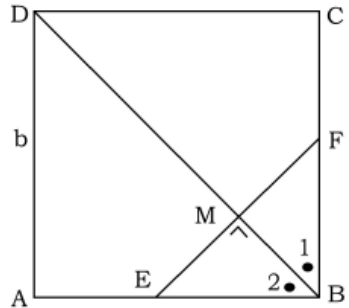
$$\frac{BF}{BE} = \frac{AB}{AD}, \quad 즉 \quad BF = \frac{a^2}{2b}$$

마찬가지로 하면 $BG = \dfrac{a^2}{2c}$

2) (그림 2-44)

그림 2-44

$EF \perp BD$, $EF \perp BD_1$이므로 EF⊥평면 D_1DB, EF와 BD의 사귐점 M에서 BD_1에 그은 수직선의 밑점을 N이라고 하면 MN이 구하려는 거리이다.

$$MN = \frac{a^2c}{2\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

29. 귀유법을 리용할것.

30. (그림 2-45)에서 $\angle ABE = 30^\circ$

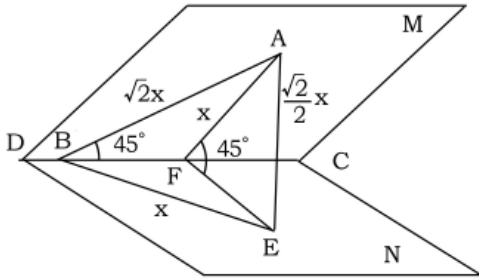



그림 2-45

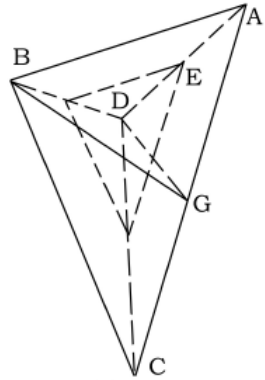



그림 2-46

31. (그림 2－46) AB＝BC, AD＝DC이므로 AC⊥BG, AC⊥DG

∴ AC⊥평면 BGD

또한 EF//AC이므로 EF⊥평면 BGD

∴ 평면 BEF⊥평면 BGD

32. (그림 2－47)

1) M에서 AB에 내린 수직선의 밑점을 G라고 하면 NG⊥AB

따라서 MG//BC, NG//BE

평면 MNG//평면 BEC

즉 MN//평면 BEC

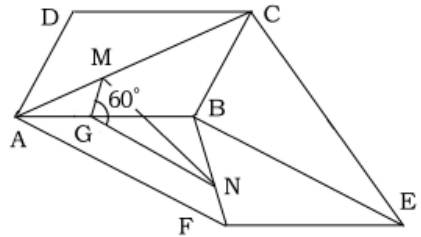



그림 2-47

2) ∠MGN＝60°, $MG=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $GN=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

따라서 $MN=\frac{\sqrt{14}}{4}$

3) MN과 AB사이의 거리는 G에서 MN까지의 거리이다.

크기는 $\frac{3\sqrt{42}}{56}$

33. 2) $\arctan 2\sqrt{2}$

34. (그림 2−48)에서 O의 N에 대한 사영을 F, F의 AC에 대한 사영을 E라고 하면

$\angle OAF=\alpha$, $\angle OCF=\beta$, $\angle OEF=\theta$, OA=m, OC=n, OF=x라고 하면

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\frac{x^2}{m^2}+\frac{x^2}{n^2}=x^2\frac{m^2+n^2}{m^2n^2}=\frac{x^2}{OE^2}=\sin^2\theta$$

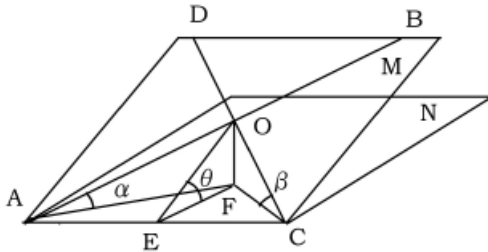



그림 2−48

35. 1) VC=2a, VD=$\sqrt{5}$a, VE=2a, 2) $\arccos\frac{3}{4}$,

3) $\arctan\frac{1}{2}$, 4) $\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. 다면체와 회전체

1) 다면체

① 다면체의 일반적개념

ㄱ. 다면체

몇개의 다각형으로 둘러막힌 공간의 부분을 다면체라고 부른다.

다면체를 이루는 다각형을 다면체의 면, 면들이 사귀는 공통변을 모서리, 모서리들의 사귐점을 다면체의 정점이라고 부른다.

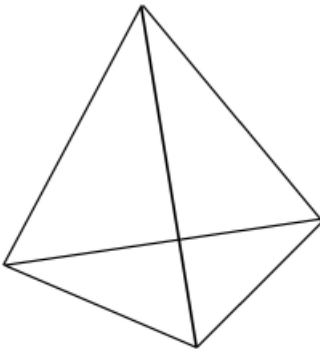
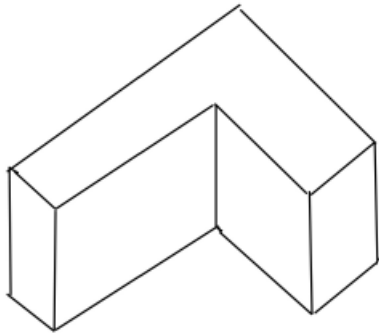
같은 면에 속하지 않는 두 정점을 맺는 선분을 다면체의 대각선이라고 부른다.

ㄴ. 볼록다면체와 오목다면체

그림 2-49

다면체에서 어느 면의 평면에 관해서도 모든 면들이 한쪽에만 놓인다면 그러한 다면체를 볼록다면체라고 부르고 그렇지 않는 다면체를 오목다면체라고 부른다. 앞으로 볼록다면체를 그냥 다면체라고 부르기로 한다. (그림 2-49)

ㄷ. n면체

면의 수가 n인 다면체를 n면체라고 부른다.

ㄹ. 바른다면체

다면체들가운데서 모든 면들이 합동인 바른다각형이고 매개 정점에서 나가는 모서리의 수가 같은 볼록다면체를 바른다면체라고 부른다.

바른다면체에는 다섯가지 즉 바른4면체, 바른6면체, 바른8면체, 바른12면체. 바른20면체가 있다.

② 각기둥

ㄱ. 각기둥

두 면은 평행이고 다른 면들은 모두 한 직선에 평행인 다면체를 각기둥이라고 부른다. (그림 2－50)

여기서 평행인 두 면을 각기둥의 밑면, 직선에 평행인 면들을 각기둥의 옆면, 두 이웃 옆면의 공통변을 각기둥의 옆모서리, 두 밑면사이의 거리를 각기둥의 높이라고 부른다.

두 밑면이 ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$인 각기둥을 각기둥 ABCDE－$A_1B_1C_1D_1E_1$와 같이 표시한다.

ㄴ. n각기둥

밑면의 변의 개수가 n인 각기둥을 n각기둥이라고 부른다.

각기둥에서 옆모서리들은 서로 평행이다.

ㄷ. 직각기둥과 빗각기둥

옆모서리가 밑면에 수직인 각기둥을 직각기둥이라고 부르고 수직이 아닌 각기둥을 빗각기둥이라고 부른다.

직각기둥의 옆면들은 직4각형이다.

ㄹ. 바른각기둥

밑면이 바른다각형인 직각기둥을 바른각기둥이라고 부른다.

ㅁ. 대각선면

각기둥에서 한 옆면에 놓이지 않는 두 옆모서리를 지나는 평

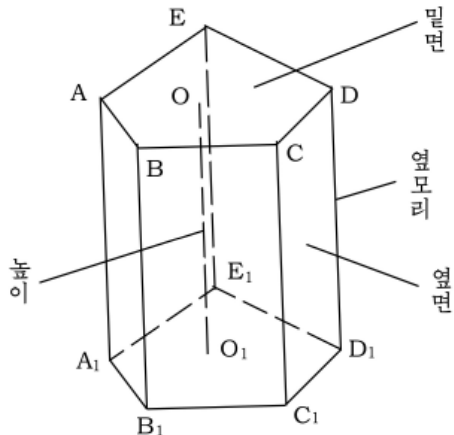



그림 2－50

면의 자름면을 각기둥의 대각선면이라고 부른다.

ㅂ. 각기둥의 성질 〔정리1〕

1) 각기둥의 옆면은 평행4변형이다.

2) 각기둥의 두 밑면은 합동이다.

ㅅ. 평행6면체

밑면이 평행4변형인 각기둥을 평행6면체라고 부른다.

옆모서리가 밑면에 수직인 평행6면체를 직평행6면체라고 부르며 수직이 아닌 평행6면체를 빗평행6면체라고 부른다.

특히 밑면이 직4각형인 직평행6면체는 직6면체라고 부른다.

〔정리2〕 평행6면체에서

1) 맞은 면들은 평행이며 합동이다.

2) 대각선들은 모두 한 점에서 사귀며 그 점에서 2등분한다.

③ 각뿔과 각뿔대

ㄱ. 각뿔

한 다각형 ABC…E와 그 다각형의 평면밖에 한 점 S가 주어졌다. 이 점을 다각형의 매 정점과 맺어서 얻는 3각형들과 주어진 다각형을 변으로 하는 다면체를 각뿔이라고 부른다.

여기서 S를 각뿔의 정점, 다각형 ABC…E를 각뿔의 밑면, 3각형ASB, BSC, …, ESA를 각뿔의 옆면, SA, SB…, SE를 각뿔의 옆모서리, 정점에서 밑면의 평면에 그은 수직선은 SO(또는 그 길이)를 각뿔의 높이라고 부른다. (그림 2—51) 정점이 S이고 밑면이 ABC… E인 각뿔을 각뿔 S—ABC… E로 표시한다.

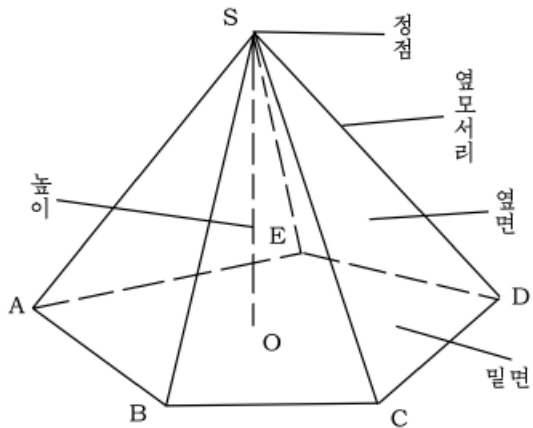



그림 2—51

밑면의 변의 수가 n인 각뿔을 n각뿔이라고 부른다.

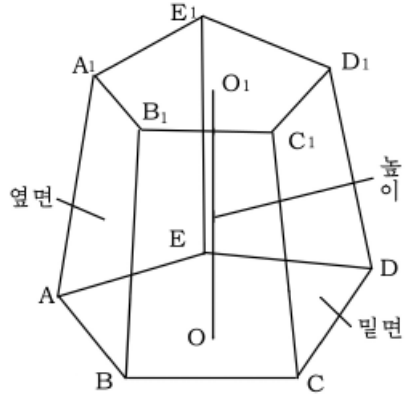
밑면이 바른다각형이고 옆모서리의 길이가 모두 같은 각뿔을 바른각뿔이라고 부른다.

ㄴ. 각뿔대

각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자를 때 밑면과 자름면사이의 부분을 각뿔대라고 부른다. (그림 2−52)

그림 2−52

여기서 평행인 두 면을 각뿔대의 밑면, 나머지면들을 각뿔대의 옆면이라고 부르고 두 밑면사이의 거리를 각뿔대의 높이라고 부른다.

n각뿔로부터 얻어지는 각뿔대를 n각뿔대라고 부르며 바른각뿔로부터 얻어지는 각뿔대를 바른각뿔대라고 부른다.

밑면이 ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$인 각뿔대를 각뿔대 ABCDE−$A_1B_1C_1D_1E_1$로 표시한다.

[정리3] 각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자를 때

1) 자름면은 밑면과 닮은 다각형이다.

2) 자름면과 밑면의 면적의 비는 정점으로부터 그 밑면들까지의 거리의 2제곱의 비와 같다.

④ 다면체의 체적

ㄱ. 각기둥의 체적

$$V=S_{밑}\times h \quad 또는 \quad V=S_{수직자름면}\times \ell$$

여기서 $S_{밑}$은 각기둥의 밑면적, h는 각기둥의 높이, $S_{수직자름면}$은 각기둥의 수직자름면의 면적, ℓ은 옆모서리의 길이이다.

ㄴ. 각뿔의 체적 $V=\frac{1}{3}Sh$ (S: 각뿔의 밑면적, h: 각뿔의 높이)

ㄷ. 각뿔대의 체적 $V=\frac{1}{3}h(s_1+\sqrt{s_1s_2}+s_2)$

(S_1: 각뿔대의 웃밑면의 면적, S_2: 각뿔대의 아래밑면의 면적)

2) 회전체

① 원기둥

ㄱ. 회전체

다문선으로 둘러싸인 평면도형을 그 평면에 있는 직선 ℓ을 축으로 회전시킬 때 생기는 도형을 회전체라고 부른다.

ㄴ. 원기둥

직4각형을 그의 한변을 축으로 하여 한바퀴 회전시킬 때 생기는 회전체를 직원기둥 또는 간단히 원기둥이라고 부른다.

이때 축에 수직인 변이 그리는 면을 원기둥의 밑면, 축에 평행인 변이 그리는 면을 원기둥의 옆면, 두 밑면사이의 거리를 원기둥의 높이라고 부른다. (그림 2−53)

원기둥의 옆면과 축을 지나는 평면과의 사귐선들을 원기둥의 모선이라고 부른다.

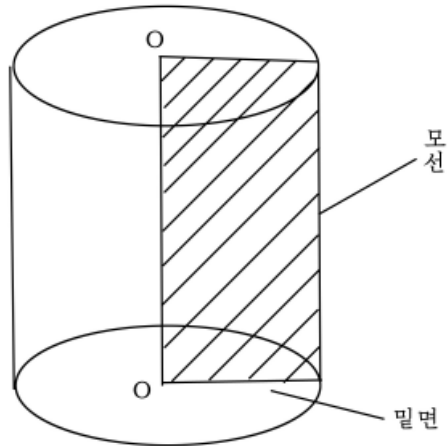



그림 2−53

② 원뿔과 원뿔대

직3각형 SAO(∠O=∠R)를 그의 한 직각변 SO를 축으로 하여 한바퀴 회전시킬 때 생기는 회전체를 직원뿔 또는 간단히 원뿔이라고 부른다.

이때 다른 직각변 OA가 그리는 면을 원뿔의 밑변, 빗변이 그리는 면을 원뿔의 옆면, 점 S를 원뿔의 정점, 정점에서 밑변까지의 거리를 원뿔의 높이라고 부른다. (그림 2−54)

원뿔의 옆면과 축을 지나는 평면과의 사귐선들을 모선이라고 부른다. 원뿔을 밑면에 평행인 평면으로 자를 때 밑면과 자름면사이의 부분을 원뿔대라고 부른다. 원뿔대에서도 모선, 밑면, 높이를 생각한다.

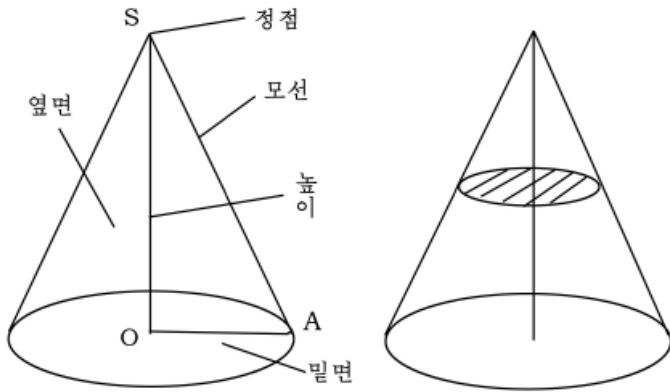



그림 2-54

③ 구

반원을 그 직경을 축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체를 구라고 부른다. (그림 2—55)

이때 반원둘레가 그리는 면을 구면, 반원의 중심을 구의 중심, 구의 중심과 구면의 한 점을 맺는 선분을 구의 반경이라고 부른다. 구면의 두 점을 맺는 선분이 구의 중심을 지날 때 이 선분을 구의 직경이라고 부른다.

구와 평면과의 사귐은 원이다. 구의 중심을 지나는 평면으로 구면을 자를 때 생기는 원둘레를 구의 큰 원이라고 부르며 구의 중심을 지나지 않는 평면으로 자를 때 생기는 원둘레를 구의 작은 원이라고 부른다. (그림 2—56)

구를 한 평면으로 잘랐을 때 생기는 구의 매 부분을 결구, 그 자름면을 결구의 밑면, 그 밑면에 수직인 구의 직경에서 결구안의 부분을 결구의 높이라고 부른다.

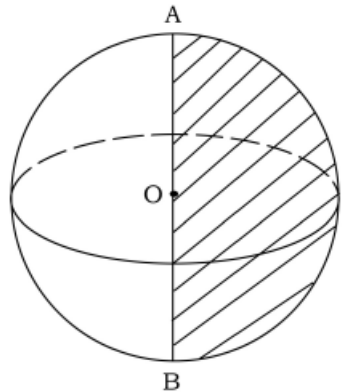



그림 2-55

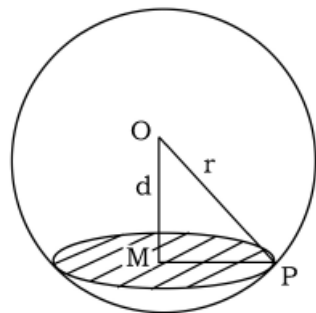



그림 2-56

특히 자름면이 구의 중심을 지날 때 생기는 구의 매 부분을 반구라고 부른다. 구면을 한 평면으로 잘랐을 때 생기는 구면의 매 면을 구면갓(구관)이라고 부른다.

④ 회전체의 체적

ㄱ. 원기둥의 체적 $V = sh$ (s: 밑면적, h: 높이)

ㄴ. 원뿔의 체적 $V = \frac{1}{3}sh$ (s: 밑면적, h: 높이)

ㄷ. 원뿔대의 체적 $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R\ \ r + r^2)$:

(R, r: 두 밑면의 반경, h: 높이)

ㄹ. 구의 체적 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (r: 반경)

ㅁ. 구면의 면적 $S = 4\pi R^2$ (R: 반경)

3) 문제풀이의 묘리

기본도형에 관한 지식의 응용문제

[례1] 모서리의 길이가 a인 바른4면체의 한 모서리와 그의 맞은편 모서리를 1:2로 나누는 점을 지나는 평면으로 4면체를 잘랐을 때 자름면의 면적을 구하여라.

(그림 2－57)

그림 2－57

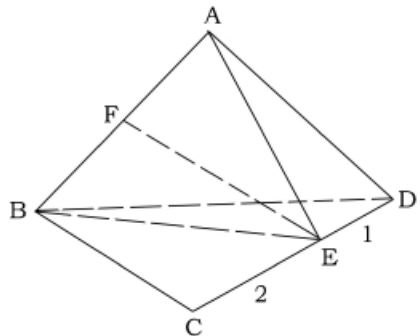
(설명) DC를 1:2로 나누는 점을 E라고 하자. 즉 DE:EC＝1:2

CD와 AB는 서로 마주하고있는 모서리이다.

3각형 BCE에서 코시누스정리에 의하여

$$BE^2 = a^2 + (\frac{2}{3}a)^2 - 2a\frac{2}{3}a\cos 60 = \frac{7}{9}a^2$$

ABCD는 바른4면체이므로 △BCD≡△ACD

∴ AE＝BE

즉 △AEB는 2등변3각형이다.

AB의 가운데점을 F라고 하면 EF⊥AB

$$EF^2 = BE^2 - BF^2 = \frac{7a^2}{9} - \frac{a^2}{4} = \frac{19a^2}{36}$$

$$\therefore\ EF = \frac{\sqrt{19}}{6}a \qquad \therefore\ S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}$$

[례2] 바른4각기둥의 밑면의 변의 길이가 a이고 대각선과 옆면사이의 각이 α이다. 이 각기둥의 체적을 구하여라. (그림 2−58)

(설명) $ABCD-A_1B_1C_1D_1$는 바른4각기둥이므로 $C_1D_1\perp$평면 AA_1D_1D

$\therefore \angle C_1AD_1 = \alpha$

높이를 h라고 하면

$\triangle AD_1C_1$에서 $\cos\alpha = \dfrac{AD_1}{AC_1} = \dfrac{\sqrt{a^2+h^2}}{\sqrt{2a^2+h^2}}$

$$\therefore\quad \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{a^2}{a^2+h^2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{a^2}{a^2+h^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cot^2\alpha = 1 + \frac{h^2}{a^2},\quad h^2 = a^2(\cot^2\alpha - 1)$$

$$\therefore\quad V = a^2h = a^3\sqrt{\cot^3\alpha - 1}$$

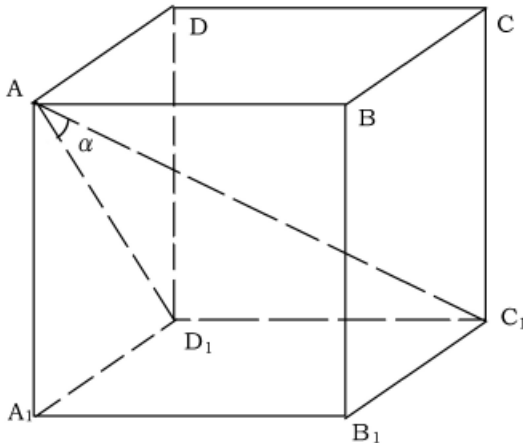



그림 2−58

[례3] 3각뿔 V－ABC의 매 변의 면적이 $S_{VAB}=3$, $S_{VBC}=4$, $S_{VCA}=5$, $S_{ABC}=6$이고 세 옆면과 밑면이 이루는 각의 크기는 서로 같다. 이 각뿔의 체적을 구하여라. (그림 2－59)

그림 2－59

(설명) 점 V의 밑면에 대한 사영을 O라고 하자.

세 옆면이 밑면과 이루는 각은 서로 같으므로 O는 △ABC의 내심이다.

O에서 BC, AC, AB에 그은 수직선의 밑점을 각각 D, E, F라고 하면 OD＝OE＝OF이므로

VD＝VE＝VF

이것들의 길이를 h라고 하면

$$3=\frac{1}{2}AB\cdot h,\quad 4=\frac{1}{2}BC\cdot h,\quad 5=\frac{1}{2}AC\cdot h$$

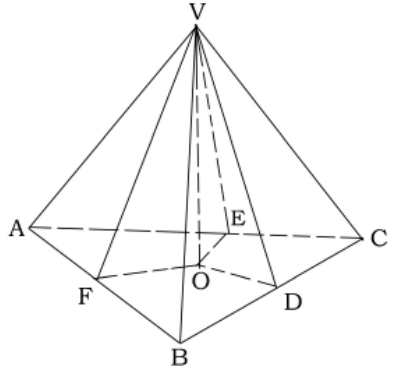
$$\therefore\quad AB=\frac{6}{h},\quad BC=\frac{8}{h},\quad AC=\frac{10}{h}$$

즉 $AB^2+BC^2=AC^2$

∴ △ABC는 ∠B가 직각인 직3각형이다.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{24}{h^2}=6$이므로 $h=2$

$$\therefore\quad r=\frac{AB+BC-AC}{2}=\frac{2}{h}=1$$

△VDC에서 $VO=\sqrt{h^2-r^2}=\sqrt{3}$ $\quad\therefore\quad V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h=2\sqrt{3}$

[례4] 평행6면체의 한 정점에서 나가는 세 모서리의 길이는 각각 a, b, c이고 둘씩 이루는 각이 모두 60° 이다. 그의 체적을 구하여라. (그림 2－60)

(설명) 평행6면체에서 $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle DAB=60^\circ$라고 하자.

점 A_1의 변 ABCD에 대한 사영을 O라고 하면 O∈AC이다.

A_1에서 AB에 그은 수직선의 밑점을 M이라고 하면 OM⊥AB이다.

$A_1A=a$,　$AB=b$, $AD=c$라고 하면 직3각형 A_1MA에서

$$A_1M=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$AM=\frac{a}{2}$$

직3각형　OMA에서

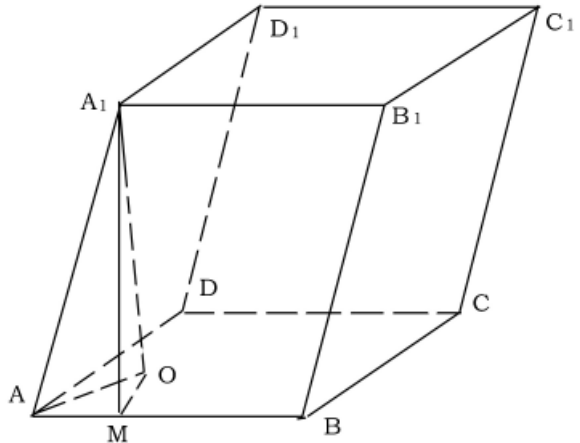
$\angle OAM=30^\circ$이므로

$$OM=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

그림 2-60

직3각형　A_1OM에서

$$A_1O^2=A_1M^2-MO^2=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{12}\right)a^2=\frac{2}{3}a^2$$

$$V=A_1O\cdot S_{\square ABCD}=\frac{\sqrt{6}}{3}abc\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}abc$$

[례5] 한 원뿔대의 옆면을 전개하였을 때 중심각이 α이고 밑면의 반경이 각각 r, R이다. 이 원뿔대의 체적 및 축을 지나는 자름면의 정각 θ를 구하여라. (그림 2—61)

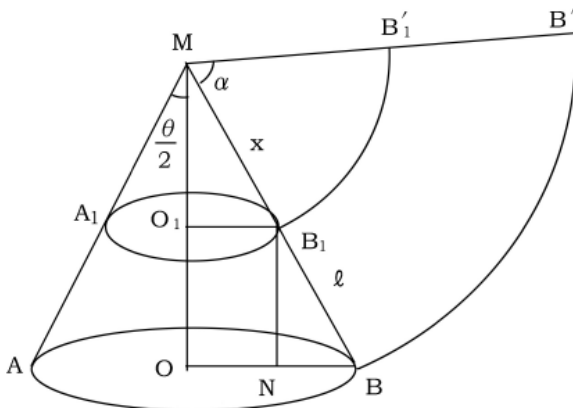



그림 2-61

(설명) 원뿔대의 두 모선의 사귐점을 M, $MB_1=x$, 모선의 길이 $BB_1=\ell$, O_1, O을 각각 웃밑면, 아래밑면의 중심이라고 하면

$$\alpha = \frac{2\pi R}{\alpha+\ell} = \frac{2\pi r}{x} \text{ 로부터 } \quad x = \frac{\ell\ r}{R\ r}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{2\pi r}{x} = \frac{2\pi(R-r)}{\ell}$$

이 식을 풀면 $\ell = \dfrac{2\pi(R-r)}{\alpha}$

직3각형 B_1NB에서 $\quad B_1N^2=B_1B^2-BN^2$

$$B_1N^2=\ell^2-(R-r)^2=\frac{4\pi^2(R-r)^2}{\alpha^2}-(R-r)^2=\frac{(R-r)^2}{\alpha^2}(4\pi^2-\alpha^2)$$

$\alpha \le 2\pi$ 일 때 $\quad B_1N = \dfrac{R-r}{\alpha}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$

$$V=\frac{1}{3}\pi B_1N(R^2+R\ r+r^2)=\frac{\pi(R-r)}{3\alpha}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}(R^2+R\ r+r^2)$$

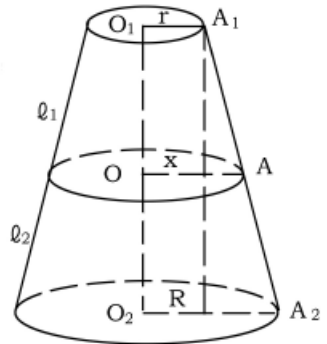
직3각형 MO_1B_1에서 $\quad \sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{B_1O_1}{MB_1}=\dfrac{\alpha}{2\pi}\in(0,\ 1)$

$$\therefore \quad \theta = 2\arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$$

그림 2-62

[례6] 원뿔대의 밑면의 반경이 각각 r, R이고 원뿔대의 옆면적이 밑면에 평행인 평면에 의하여 2등분될 때 이 자름면의 반경이 $\sqrt{\dfrac{r^2+R^2}{2}}$ 임을 증명하여라.

(그림 2-62)

(설명) 자름면의 반경을 x, 자름면에 관하여 웃쪽 원뿔대의 모선의 길이를 ℓ_1, 아래쪽 원뿔대의 모선의 길이를 ℓ_2 라고 하면 조건으로부터

$$2\pi(r+x)\ell_1=\pi(r+R)(\ell_1+\ell_2)$$

즉 $\dfrac{\ell_1}{\ell_1+\ell_2}=\dfrac{r+R}{2(r+x)}$

$A_1O_1 // AO // A_2O_2$ 이므로 $\dfrac{x-r}{R-r}=\dfrac{\ell_1}{\ell_1+\ell_2}$

$$\therefore \quad \frac{r+R}{2(r+x)}=\frac{x-r}{R-r}$$

이 식을 풀면

$$x^2=\frac{R^2+r^2}{2}, \quad 즉 \ x=\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}$$

[례7] 직3각형의 빗변을 축으로 하여 그것을 회전시켜 얻은 회전체의 체적을 P, 두 직각변을 각각 축으로 하여 회전시켜 얻은 회전체의 체적을 g, r 라고 할 때 $\dfrac{1}{P^2}=\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{r^2}$ 임을 증명하여라. (그림 2−63)

(설명) 직3각형 ABC의 세 변을 각각 a, b, c, ∠A=90°라고 하자.

A에서 BC에 내린 수직선의 밑점을 D라고 할 때 AD=h라고 하면

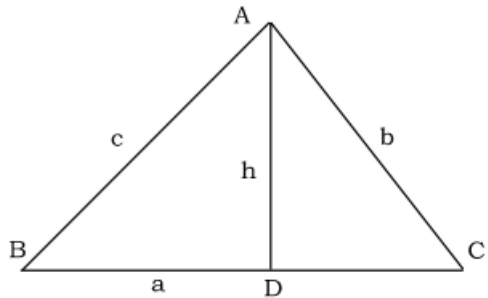



그림 2−63

$$ah=bc,\ P=\frac{1}{3}\pi h^2a,\ q=\frac{1}{3}\pi b^2c,\ r=\frac{1}{3}\pi bc^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{9}{\pi^2b^4c^2}+\frac{9}{\pi^2b^2c^4}=\frac{9(c^2+b^2)}{\pi^2b^4c^4}=\frac{9a^2}{\pi a^4h^4}=\frac{9}{\pi a^2h^4}=\frac{1}{p^2}$$

[례8] △ABD, △BDC는 직2등변3각형이고 △ABD⊥△BDC, AD==BC=$\sqrt{2}$ 이다. AB우에 점 P를 평면 PDC와 평면 BDC사이의 각이 60°되게 정하였다. V_{B-PDC} 를 구하여라. (그림 2−64)

(설명) P에서 BD에 그은 수직선의 밑점을 N이라고 하면

△ABD⊥△BDC이므로 PN⊥평면 BDC이다.

N에서 CD에 그은 수직선의 밑점을 M이라고 하면 PM⊥CD

∴ ∠PMN은 평면 PDC와 평면 BDC가 만드는 2면각의 평면각이다.

즉 ∠PMN=60°

NM=x로 놓으면 PM=2x, PN=$\sqrt{3}x$

직3각형 NMD에서 ∠BDC=45°이므로

MD=MN=x, ND=$\sqrt{2}x$

그림 2-64

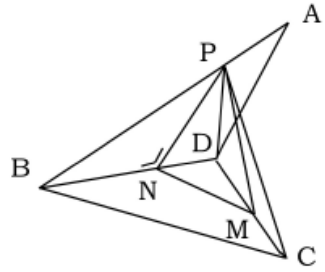
PN//AD이므로 $\frac{PN}{AD}=\frac{BN}{BD}$ ∴ $\frac{PN}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ PN=\sqrt{2}(1-x),\quad \sqrt{3}x=\sqrt{2}-\sqrt{2}x=PN$

이 식을 풀면 $x=\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

즉 $PN=\sqrt{3}\cdot\ \sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

$$V_{B-PDC}=V_{P-BDC}=\frac{1}{3}PNS_{\Delta BDC}=\frac{1}{3}(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\frac{1}{2}\sqrt{2}\ \cdot\sqrt{2}=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}$$

도형들의 결합체에 관한 문제

[례1] 1) 직3각형 ABC에서 빗변 BC를 축으로 하여 3각형을 회전시켜 얻은 회전체의 체적과 겉면적을 구하여라. 여기서 AB=c, AC=b이다.

2) 중심각이 30°이고 반경이 2인 부채형 OAB를 OA를 축으로 하여 회전시켜 얻은 회전체의 체적을 구하여라.

(설명) 1) (그림 2-65) 직3각형의 빗변에 내린 높이는

$$OA=\frac{bc}{\sqrt{c^2+b^2}}\qquad \therefore\quad V=\frac{1}{3}\pi\,\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}$$

$$S_{겉}=\pi OA(b+c)=\frac{\pi bc}{\sqrt{b^2+c^2}}(b-c)$$

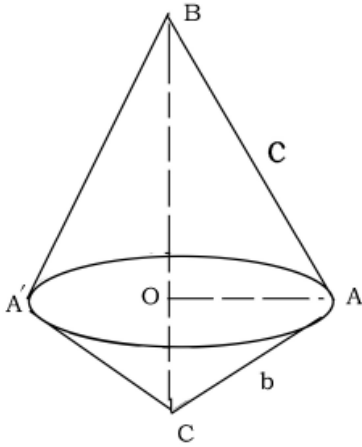



그림 2−65

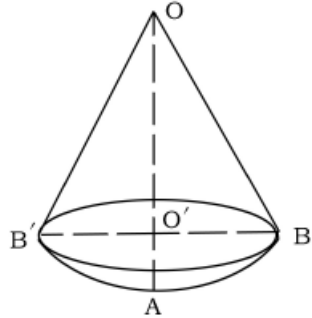



그림 2−65−1

2) (그림 2−65−1)　$O'B=1,\quad OO'=\sqrt{3},\quad O'A=2-\sqrt{3}$

$S_{겉}=S_{원뿔}+S_{결구}=\pi O'B\cdot OB+2\pi OB\cdot O'A=10\pi-4\sqrt{3}\pi$

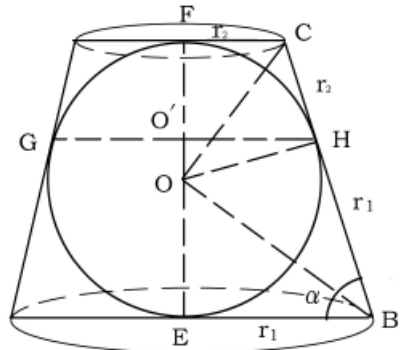
[례2] 원뿔대의 모선과 밑면이 α의 각을 이룬다. 이 원뿔대가 반경이 R인 구와 내접하였다. 이때 다음 것을 구하여라. (그림 2−66)

1) $S_{원뿔대}:S_{구}$

2) 원뿔대에 의하여 잘리우는 구면의 두 부분의 면적의 비

3) α가 어떤 값일 때 원뿔대의 옆면적이 최소로 되겠는가? 그때의 원뿔대의 체적은 얼마인가?

그림 2−66

(설명) 원뿔대의 우, 아래 밑면의 반경을 각각 $r_1,\ r_2$, 모선의 길이를 ℓ이라고 하자.

1) $r_1=R\cot\dfrac{\alpha}{2},\quad r_2=R\tan\dfrac{\alpha}{2},\quad \ell=r+_1 r_2$

$\therefore\ S_{원뿔대의\ 옆면적}=\pi(r_1+r_2)\ell=\dfrac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha},$

$S_{구}=4\pi R^2$

즉 $S_{원뿔대}:S_{구}=1:\sin^2\alpha$

2) 구면의 두 부분가운데 한 부분은 구관 GFH이고 다른 한 부분은 구관 GEH이다.

∠FOH$=\alpha$이므로

$$O_1F=R-R\cos\alpha,\quad O_1E=R+R\cos\alpha$$

$$S_{GFH}:S_{GEH}=2\pi R^2(1-\cos\alpha):2\pi R^2(1+\cos\alpha)=\tan\frac{\alpha}{2}$$

3) $S_{원뿔대}=\dfrac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}$

$\alpha=90^\circ$일 때 즉 원뿔대가 원기둥일 때 원뿔대의 옆면적이 최소로 된다. 이때 원뿔대의 체적은 $V=2\pi R^3$

[례3] 반경이 R인 구에 내접하는 바른3각뿔의 최대면적을 구하여라. (그림 2−67)

(설명) 3각뿔의 높이를 h라고 하면

$r^2=h(2R-h)$ (r는 바른3각형의 밑면의 반경)

$AB=2r\sin 60^\circ=\sqrt{3}r$

그러므로 $V_{각뿔}=\dfrac{1}{3}\;\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}r)^2h=\dfrac{\sqrt{3}}{4}h^2(2R-h)\le\dfrac{8}{27}\sqrt{3}R^3$

∴ $h=\dfrac{4}{3}R$일 때 내접바른3각뿔의 최대면적은 $\dfrac{8}{27}\sqrt{3}R^3$이다.

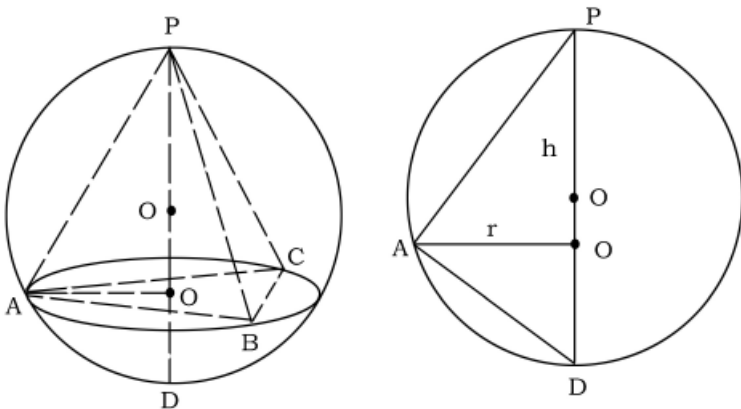



그림 2−67

[례4] 한 원뿔에 한 등변원기둥(밑면의 직경과 높이가 같은)이 내접하였다. 원기둥의 한 밑면은 원뿔의 밑면에 있다. 다음에 원기둥의 웃밑면이 밑면인 작은 원뿔에 또 등변원기둥이 내접하였다. 이런 식으로 무수히 많은 등변원기둥을 생각할 때 그것들의 체적의 합이 처음 원뿔의 체적의 $\frac{3}{7}$이면 가장 큰 등변원기둥의 체적은 처음 원뿔의 체적의 $\frac{3}{8}$임을 증명하여라. (그림 2−68)

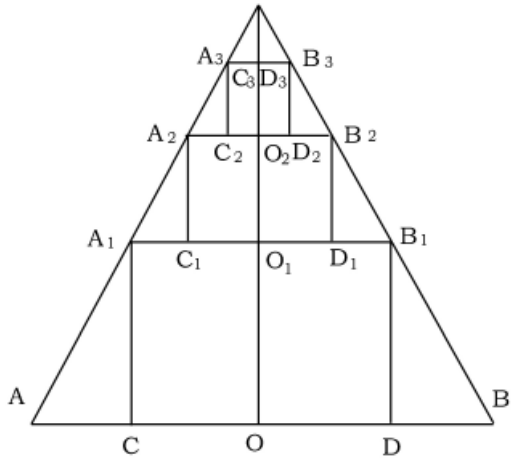



그림 2−68

(설명) 원뿔의 밑면의 반경을 R, 높이를 h, 내접등변원기둥의 밑면의 반경을 차례로 r_1, r_2, r_3, …하자.

$B_1D // SO$ 이므로 $\frac{BD}{BO}=\frac{B_1D}{SO}$ 즉 $\frac{R-r_1}{R}=\frac{2r_1}{h}$

이 식을 풀면 $r_1=\frac{Rh}{2R-h}$

같은 방법으로 하면 $r_2=\frac{r_1h}{2R+h}=R(\frac{h}{2R+h})^2$

… … … …

$$r_n=R(\frac{h}{2R+h})^n$$

$$V=\pi r_1^2 2r+\pi r_2^2 2r_2+\cdots+\pi r_n^2 2r_n+\cdots=2\pi(r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n+)=$$

$$=\frac{2\pi\frac{R^3h^3}{(2R+h)^3}}{1-\frac{h^3}{(\frac{h^3}{(2R+h)^3})}}=\frac{\pi R^2h^3}{4R^2+6Rh+3h^2}=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}\pi R^2h$$

즉 $h=2R$, $\therefore$ $V_{원뿔}=\frac{1}{3}\pi R^2(2R)=\frac{2}{3}\pi R^3$

$r_1=\frac{Rh}{2R+h}=\frac{R\cdot 2R}{2R+2R}=\frac{R}{2}$ 이므로 가장 큰 원기둥의 체적은

$$V'=\pi(\frac{R}{2})^2 2\frac{R}{2}=\frac{\pi R^3}{4}=\frac{3}{8}\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{3}{8}V_{원뿔}$$

[례5] 반경이 1인 4개의 작은 공이 책상면우에 쌓여있는데 밑층에 3개, 웃층에 1개 있다. 공들은 둘씩 서로 접하고있다. 웃층의 공의 가장 높은 자리에 있는 점은 책상면으로부터 얼마만큼 떨어져있는가?(그림 2-69)

(설명) 4개의 공이 둘씩 접하므로 중심들은 4면체의 정점으로 된다.

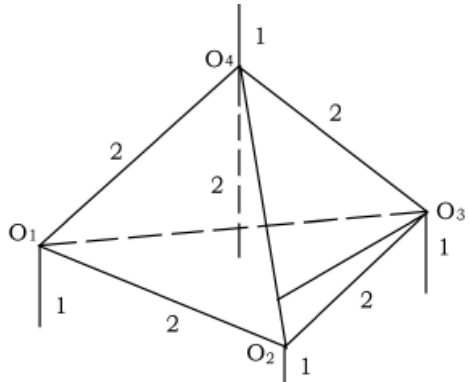



그림 2-69

이 4면체의 모서리의 길이는 2이므로 높이는 $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ 이다.

그러므로 구하려는 거리는 $\frac{2}{3}\sqrt{6}+2$ 이다.

자름면에 관한 문제

[례1] 바른4면체 ABCD의 모서리의 길이는 1이다. AD, BC의 가운데점을 각각 P, Q라고 할 때 PQ의 가운데점을 지나며 PQ에 수직인 자름면을 그렸

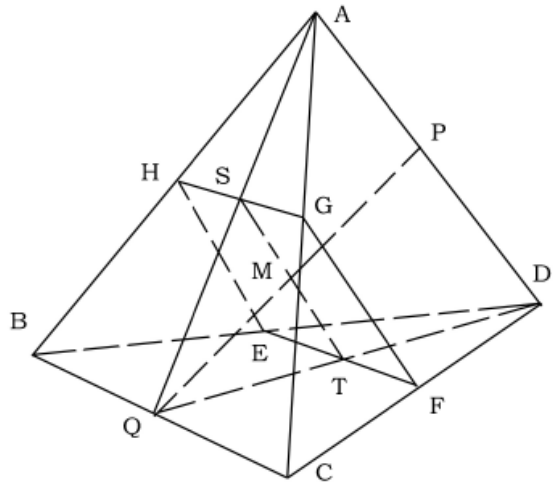



그림 2-70

다. A를 정점으로 하고 자름면을 밑면으로 하는 각뿔의 체적을 구하여라. (그림 2−70)

(설명) PQ의 가운데점 M을 지나 AD 에 평행인 직선을 그어 AQ, DQ와 사귀는 점을 각각 S, T라고 한다.

S, T를 각각 지나며 BC에 평행인 직선을 그어 AB, AC, BD, DC와 사귀는 점을 각각 H, G, E, F라고 하면 M이 가운데점이므로 S, T, H, G, E, F는 각각 대응하는 선분의 가운데점이다.

AD//평면 EFGH, BC//평면 EFGH

∴ PQ⊥평면 EFGH

그러므로 EFGH가 조건에 맞는 자름면이다.

AD//평면 EFGH이므로 $V_{A-EFGH}=V_{P-EFGH}$

EFGH는 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 바른4각형이고 $PQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $PM=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\therefore\ V_{P-EFGH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{48}$$

[례2] 모서리가 모두 a인 바른4각뿔 V−ABCD에서 옆모서리 VB, VD의 가운데점을 각각 H, K라고 할 때

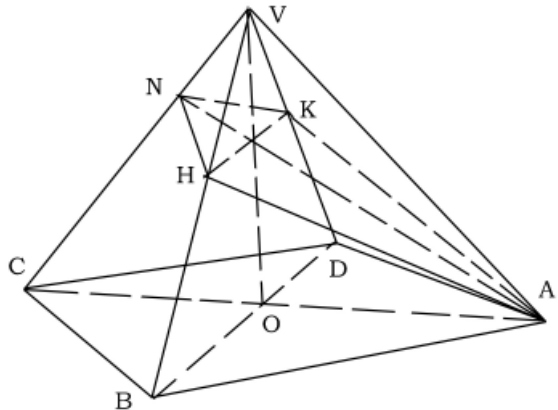
1) A, H, K 세 점이 결정하는 평면에 의하여 선분 VC는 1:3의 비로 내분된다는것을 증명하라.

2) 이 자름면의 면적을 구하라.

(설명) (그림 2−71)

1) VO가 원뿔의 높이라고 하자. △VBD에서 VO가 HK와 M에서 사귀고 △VAC에서 AM의 연장선이 VC와 N에서 사귄다고 하면 4각형 AHNK가 세 점 A, H, K를 지나는 자름면이다. HK//BD이므로 M은 VO의 가운데점이다.

그림 2−71

NC에서 가운데점 P를

취하면 O가 AC의 가운데점이므로 OP//AN

△VOP에서 M은 VO의 가운데점이므로 N은 VP의 가운데점이다.

∴ VN＝NP＝PC

즉 N은 VC를 3∶1로 나누는 점이다.

2) V－ABCD는 바른4각뿔이고 H, K는 각각 VB, VD의 가운데점이므로 △VAB≡△VAD ∴ AK=AH

M이 HK의 가운데점이므로 AM⊥HK

$$\therefore\quad S_{AHNK}=\frac{1}{2}AN\cdot HK,\quad HK=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

또한 $VA=VC=a$, $AC=\sqrt{2}a$ 이므로 VA⊥VC

$$\therefore\quad AN^2=a^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2=\frac{10}{9}a^2,\quad S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{5}}{6}a^2$$

평면도형의 접기에 관한 문제

[례1] 직4각형 ABCD에서 AB＝3, BC＝4이다. 4각형을 대각선 AC에 관하여 접어 정점 B의 평면 ADC에 관한 사영이 AD에 놓이게 하였다. 이때 다음것을 구하라.

1) 어기는 직선 AB와 CD사이의 각　2) AB와 CD사이의 거리

3) 2면각 B－AC－D의 크기　4) 3각뿔 B－ADC의 체적

(설명) (그림 2－72) 1) B에서 AD에 내린 수직선의 밑점을 F라고 하면 평면 ABD⊥평면 ADC

∴ BF⊥평면 ADC　∴ BF⊥DC

또한 DC⊥AD이므로 DC⊥평면 ABD　∴ DC⊥AB

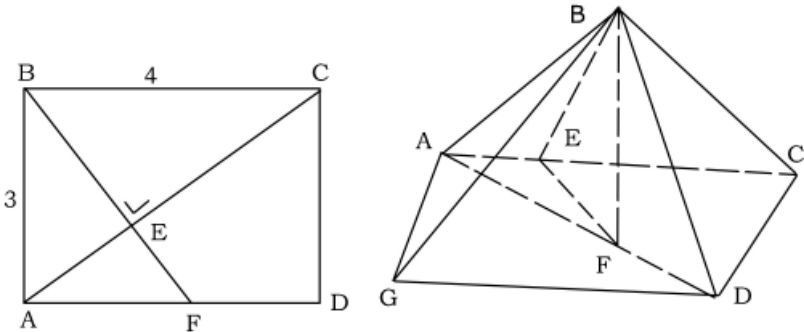



그림 2－72

∴ 어기는 두 직선 AB, CD가 이루는 각은 90°이다.

2) 점 A를 지나 AG$\underline{//}$DC인 점 G를 정하면 DC//평면 ABG이다.

그러므로 DC와 평면 ABG사이의 거리는 어기는 직선 AB와 CD사이의 거리이다. F에서 AC에 그은 수직선의 밑점을 E라고 하면 BE⊥AC이다.

$V_{D-ABG} = V_{B-ADC}$, $S_{\Delta ABG} = \frac{9}{2}$

$BE = \frac{12}{5}$, $EF = \frac{27}{20}$이므로 립체도형에서 $BF = \frac{3}{4}\sqrt{7}$이다.

$$\therefore \quad \frac{1}{3}h \cdot \frac{9}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{4} \cdot 6$$

즉 $h = \sqrt{7}$

3) ∠BEF가 평면 ABC와 평면 ADC사이의 각이다.

$$\angle BEF = \arccos\frac{9}{16}$$

4) $V_{B-ADC} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$

[례2] 직3각형 ABC에서 두 직각변은 AC=2, CB=3이고 P는 빗변우의 한 점이다. CP를 축으로 하여 3각형을 접어 직2면각 A－CP－B를 만들었다. AB=$\sqrt{7}$일 때 V_{B-APC}를 구하라. (그림 2－73)

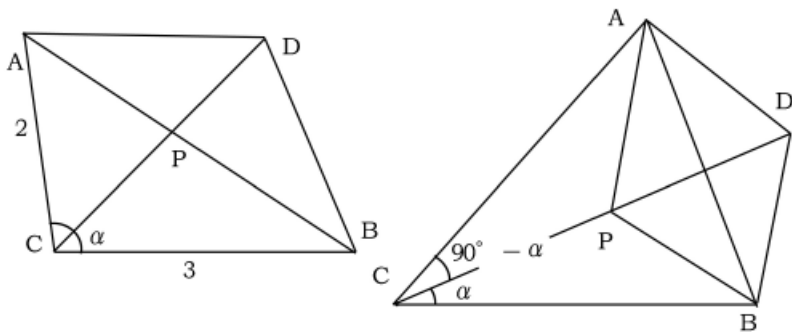



그림 2－73

(설명) 평면 ACP⊥평면 BCP이므로 B에서 CP에 내린 수직선의 밑점을 D라고 하면 BD⊥평면 ACP

$\angle PCB = \alpha$라고 하면 $BD = 3\sin\alpha$, $CD = 3\cos\alpha$

△ACD에서 $AD^2 = 4 + 9\cos^2\alpha - 2\cdot 2\cdot 3\cos\alpha\cdot\cos(90° - \alpha)$

$= 4 + 9\cos^2\alpha - 6\sin 2\alpha$

직3각형 ABD에서 $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 7 - 9\sin^2\alpha$

$\therefore\ 4 + 9\cos^2\alpha - 6\sin 2\alpha = 7 - 9\sin^2\alpha$

$\therefore\ \alpha = 45°$

$S_{\Delta ACP} + S_{\Delta BCP} = S_{\Delta ABC}$ (평면도형에서)이므로 $CP = \frac{6}{5}\sqrt{2}$

$\therefore\quad S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{6}{5}\sqrt{2}\sin 45° = \frac{6}{5}$

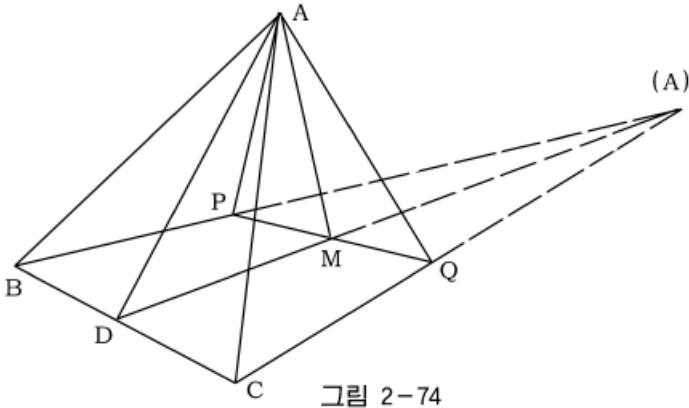
$\therefore\quad V_{B-ACP} = \frac{1}{3}\cdot BD\cdot S_{\Delta ACP} = \frac{1}{3}\cdot 3\sin 45°\cdot\frac{6}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$

[례3] 변의 길이가 a인 바른3각형 ABC를 BC에 평행인 직선 PQ를 축으로 하여 접되 평면 APQ⊥평면 BCQP되게 하였다. $(P\in AB,\ Q\in AC)$ A에서 PQ까지의 거리를 x라고 할 때

1) 접은 후에 A에서 B까지의 거리의 최소값을 구하라.

2) 접은 후에 $\angle BAC = \theta$ 라고 할 때 $\cos\theta$ 의 최소값을 구하라.

(설명) (그림 2－74) PQ, BC의 가운데점을 각각 M, D라고 하자.

그림 2－74

1) AP＝AQ이므로 AM⊥PQ　　AM＝x라고 하면

$$MD = \frac{\sqrt{3}}{2}a - x$$

평면 APQ⊥평면 BCQP이므로 AM⊥평면 BCQP

직3각형 AMD에서 $AD^2 = AM^2 + MD^2$, MD⊥BC이므로 AD⊥BC

직3각형 ADB에서 $AB^2 = AD^2 + BD^2$

$$\therefore \quad AB^2 = 2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2 + \frac{5a^2}{8}$$

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a$일 때 AB의 최소값은 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}a$이며 이때 PQ는 △ABC의 중간선이다.

2) △ABC에서 코시누스정리에 의하여

$$\cos\theta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = 1 - \frac{a^2}{2AB^2}$$

AB^2이 최소일 때 $\cos\theta$ 도 최소로 된다.

AB^2의 최소값은 $\dfrac{5a^2}{8}$이므로 $\cos\theta$ 의 최소값은 $\dfrac{1}{5}$이다.

이때 PQ는 △ABC의 중간선이다.

[례4] 직4각형 ABCD에서 $AB \le BC$, $AC = 2\sqrt{2}$ 이다. AC를 축으로 하여 4각형을 접어 △ABC⊥△ADC되게 하였다. 이때 $BD = \sqrt{5}$ 임을 알고 AB와 BC의 길이를 구하여라. (그림 2−75)

(설명) $\angle BAC = \alpha$, $AB = x$, $BC = y$라고 하면

$$x = 2\sqrt{2}\cos\alpha, \quad y = 2\sqrt{2}\sin\alpha$$

D에서 AC에 그은 수직선의 밑점을 E라고 하면

$$DE = \frac{xy}{AC} = \sqrt{2}\sin 2\alpha$$

$$CE = \frac{x^2}{AC} = 2\sqrt{2}\cos^2\alpha, \quad AE = AC - CE = 2\sqrt{2}\sin^2\alpha$$

△ABE에서 $BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos\alpha$

$$= 8\sin^4\alpha - 16\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 8\cos^2\alpha$$

△ABC⊥△ADC, DE⊥AC이므로 DE⊥△ABC, DE⊥BE

직3각형 DEB에서 $BD^2 = DE^2 + BE^2$

$$5=(\sqrt{2}\sin 2\alpha)^2+8\sin^4\alpha-16\sin^2\alpha\cos^2\alpha+8\cos^2\alpha$$
$$=8(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=8(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)$$

이것을 풀면 $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

α는 뾰족각이므로 $\alpha=30^\circ$

$\therefore\quad AB=x=\sqrt{6},\qquad BC=y=\sqrt{2}$

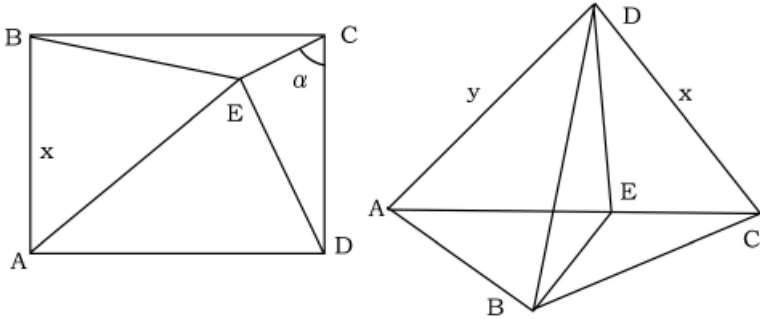



그림 2−75

옆면의 전개에 관한 문제

［례1］ 3각기둥의 밑면이 직3각형 ABC인데 ∠ACB＝90°, AB＝2, ∠ABC=15°이다. 이 각기둥의 두 옆면 C_1CAA_1, C_1CBB_1를 전개하여 한 평면에 놓았을 때 $C_1A\perp C_1B$이다. 이 각기둥의 체적과 옆면적을 구하라. (그림 2−76)

(설명) $AC=2\sin 15^\circ$, $\mathrm{BC}=2\cos 15^\circ$

직3각형 AC_1B에서

$$CC_1^{\ 2}=AC\cdot BC$$

$\therefore\quad h^2=4\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ=1$

$$V=S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{2}$$

AB＝2이므로

$$S_{옆}=(2+2\sin 15^\circ+2\cos 15^\circ)\cdot h=$$
$$=2+\sqrt{6}$$

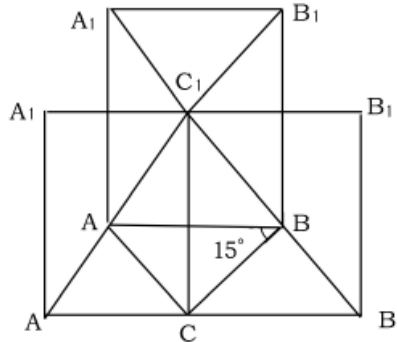



그림 2−76

［례2］ 직6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 $AB=5$, $BC=4$, $CC_1=3$이다. 점 A_1를 떠나 직6면체의 겉면을 따라 점 C까지 가는 가장 짧은 거리는 무엇인가?(그림 2－77)

(설명) 전개하는 방법이 세가지 있다.

직4각형 A_1DCB_1에서

$A_1C=\sqrt{74}$

직4각형 $A_1D_1CB_1$에서

$A_1C=\sqrt{86}$

직4각형 A_1C_1CA에서

$A_1C=\sqrt{90}$

따라서 A_1에서 C까지 가는 가장 짧은 거리는 $\sqrt{74}$이다.

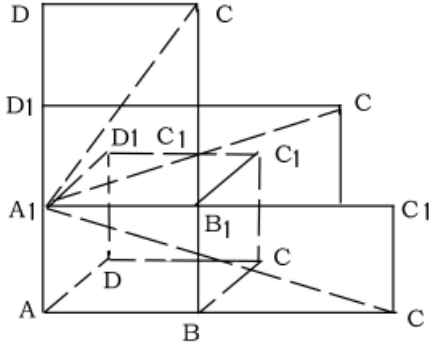



그림 2－77

련습문제

1. 직6면체의 세 면의 면적이 각각 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$이면 이 직6면체의 대각선의 길이는 ( )이다.

① $3\sqrt{5}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ 3 ④ 우의 답은 모두 틀린다.

2. 바른6면체의 8개의 정점가운데 4개의 정점은 바른4면체의 정점으로 된다. 바른6면체와 바른4면체의 겉면적의 비는 ( ) 이다.

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

3. 한 원기둥과 한 원뿔의 밑면의 직경과 높이가 모두 구의 직경과 같으면 원기둥, 구, 원뿔의 체적의 비는 ( )이다.

① 24:32:8 ② 3:2:1 ③ $6:4:\sqrt{3}$ ④ 3:2:3

4. 원뿔을 밑면에 평행인 평면으로 잘랐다. 자름면의 면적과 밑면의 면적의 비가 1:2이면 그의 높이가 나누어진 두 부분의 길이의 비는 ( )이다.

① $1:\sqrt{2}$ ② 1:4 ③ $1:(\sqrt{2}+1)$ ④ $1:(\sqrt{2}-1)$

5. 직6면체의 세 모서리가 같은 차수렬을 이루고 대각선의 길이가 $5\sqrt{2}$, 겉면적이 94이면 그의 체적은 (　)이다.

6. 원뿔의 축을 지나는 자름면이 바른3각형이면 그의 옆면적은 밑면적의 (　)배이다.

7. 원뿔의 밑면의 반경이 3, 높이가 4이면 옆면의 전개도의 중심각은 (　) 이다.

8. 체적이 $\sqrt{3}$인 바른4면체의 모서리의 길이는 (　)이다.

9. 원기둥의 옆면의 전개도가 바른4각형이면 그의 옆면적은 두 밑면적의 합의 (　)배이다.

10. 구면의 면적이 본래의 2배로 늘어나면 체적은 본래 체적의 (　)배로 된다.

11. 원뿔대의 웃밑면, 아래밑면의 반경이 각각 2, 3이다. 그의 중간자름면의 면적은 (　)이다.

12. 직평행6면체의 밑면이 등변4각형이고 두 대각선면의 면적이 각각 Q_1, Q_2이면 그의 옆면적은 (　)이다.

13. 바른n각기둥의 매 서로 이웃한 두 옆면이 이루는 2면각은 (　)이다.

14. 직6면체의 한 대각선이 한 점에서 나가는 세 모서리와 이루는 각이 각각 α, β, γ이면 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=($　$)$이다.

만일 한 대각선이 세 면과 이루는 각이 α, β, γ이면 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=($　$)$이다.

15. 한 구에 외접한 바른6면체의 겉면적이 6이면 이 구의 체적은 ( )이다.

16. 바른6각뿔의 높이가 m, 옆면과 밑면이 이루는 각이 α이면 이 6각뿔의 겉면적은 얼마인가?

17. 원기둥, 반구, 원뿔이 각각 1개 있다. 그것들의 자름면의 반경이 모두 R이다. 원기둥, 원뿔의 높이도 R이다. 이 세 도형의 체적의 비, 겉면적의 비를 구하여라.

18. 빗3각기둥의 옆모서리가 8이고 옆모서리와 밑면이 이루는 각이 60°이며 매 옆모서리사이의 거리가 각각 3, 4, 5이다. 이 각기둥의 체적 및 겉면적을 구하여라.

19. 바른3각뿔의 밑면의 변의 길이가 a이다.

1) 옆면의 정각이 60°일 때 옆모서리와 밑면이 마주하고있는 모서리사이의 각 및 거리를 구하라.

2) 옆면과 밑면사이의 각이 60°일 때 밑면과 마주하고있는 옆모서리사이의 거리를 구하라.

20. 바른4각뿔의 밑면의 변의 길이와 높이의 비는 2:1이다. 두 옆면사이의 각을 구하여라.

21. 원뿔대의 한 밑면의 반경이 다른 한 밑변의 반경의 2배이고 옆면적은 두 밑면적의 합과 같으며 축자름면의 면적은 36이다. 이 원뿔대의 체적 및 옆면적을 구하여라.

22. 원뿔대의 두 밑면적이 각각 π, 9π이며 옆면의 전개도는 고리형의 한 부분이다. 고리형의 전체 면적이 원뿔대의 겉면적과 같을 때 원뿔대의 모선의 길이를 구하여라.

23. 반경이 R인 원형철판이 있다. 여기에서 부채형을 잘라내여 최대

용량을 가지는 원뿔모양의 그릇을 만들려고 한다. 부채형의 중심각을 얼마로 하여야 하는가?

24. 4면체 ABCD에서 AB＝BC＝CD＝DA, AC＝BD이다. AC가 어떤 값을 가질 때 4면체의 체적이 최대로 되겠는가?

25. 바른3각뿔의 세 옆모서리의 길이가 모두 1이다. 이 3각뿔의 겉면적이 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 보다 클수 없다는것을 증명하여라.

26. 원뿔대의 웃밑면, 아래밑면의 반경이 각각 r, R이다.
원뿔대의 두 모선을 지나는 자름면과 밑면사이의 각이 α(자름면은 축과 사귀지 않는다.)이고 자름면과 밑면이 사귀여 생기는 자름선에 대한 중심각이 n°이다. 이 자름면의 면적을 구하여라.

27. 바른4각뿔의 밑면의 한 변의 길이와 옆모서리의 길이의 비가 $\sqrt{3}:\sqrt{2}$이다. 밑면의 한 대각선을 지나며 한 옆모서리에 평행인 자름면을 그렸을 때 이 자름면에 의하여 나누어지는 바른4각뿔의 두 부분의 체적의 비 및 자름면과 밑면사이의 각을 구하여라.

28. 4면체의 한쌍의 맞은변에 평행인 평면으로 4면체를 자를 때 자름면의 면적이 최대로 될 때의 위치를 정하여라.

29. 바른4각뿔 M－ABCD의 밑면의 변의 길이가 a이고 옆면과 밑면사이의 각이 α이다. 밑면의 한 변을 지나는 각뿔의 자름면이 밑면과 β의 각을 이룰 때 이 자름면의 면적을 구하여라.

30. 원뿔대의 모선의 길이는 $\ell=20$, 웃밑면의 반경이 $r_1=5$, 아래밑면의 반경이 $r_2=10$이다. 모선 AB의 가운데점 M에서 한마리의 개미가 옆면을 따라 B까지 가는 가장 짧은 거리는 얼마인가? 그 로정의 한 점과 웃밑면의 둘레의 한 점사이의 거리가운데서 가장 짧은 거리는 얼마인가?

31. 원뿔의 밑면의 반경이 OA＝10㎝, 모선이 VA＝30㎝이다. 점 A를 떠나 원뿔면을 한바퀴 돌아 제자리에 오는 가장 짧은 로정은 얼마인가? 그 로정의 한 점으로부터 밑면까지의 가장 긴 거리는 얼마인가?

32. 원뿔의 정점 O로부터 15㎝ 떨어져있는 원뿔면의 점 A로부터 출발하여 원뿔면을 따라 한바퀴 돌아 A로 오는 가장 짧은 로정의 길이가 24㎝이다. A가 정점 O로부터 가장 멀리에 있는 점이고 점 B가 O로부터 가장 가까이에 있는 로정우의 점일 때 OB의 길이를 구하여라.

33. 위성이 지구겉면으로부터 h만한 높이에 있을 때 지구겉면을 볼수 있는 면적이 S이다. S와 h사이의 함수관계를 이끌어내여라. 만일 관측자가 볼수 있는 지구의 겉면적이 지구의 전체 면적의 $\frac{1}{15}$과 같으면 위성은 지구면으로부터 얼마만큼 떨어져있겠는가?

34. 한 반구모양의 용기가 있다. 거기에 물을 가득 채운 후 그것을 45°기울이면 용기안에는 물이 12%정도 남게 된다는것을 증명하여라.

($V_{결구}=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$ 또는 $V_{결구}=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3r^2)$, ($h$는 결구의 높이, r는 밑면의 반경, R는 구의 반경이다.)

35. 그림 2－78에서 O는 지구의 중심이다. 지구의 반경은 R, 지구면의 두 점 A, B의 경도차는 $\alpha_2-\alpha_1$, 두 점 A, B를 각각 지나는 경도선과 위도선이 두 점 C, D에서 사귄다. A, B의 위도가 각각 β_2, β_1일 때

1) $\cos\angle AOB=\sin\beta_1\cdot\sin\beta_2+\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2\cdot\cos(\alpha_2-\alpha_1)$임을 증명하여라.

2) $\alpha_2-\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, $\beta_2=\frac{\pi}{4}$, $\sin\beta_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$일 때 두 점 A, B사이의 구면거리를 구하여라. (지구의 반경은 R=6 400㎞)

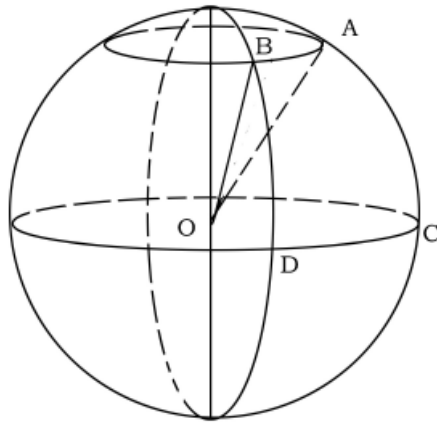



그림 2-78

답

1. ③　2. ②　3. ②　4. ④　5. 60　6. 2

7. $\frac{6}{5}\pi$　8. $\sqrt{6}$　9. 2π　10. $2\sqrt{2}$　11. $\frac{25\pi}{4}$

12. $2\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$　13. $\frac{n-2}{n}180^0$　14. 2 , 1　15. $\frac{\pi}{6}$

16. 그림 2-79에서 PO가 바른6각뿔 P-ABCDEF의 높이, M을 AB의 가운데점이라고 하면 $\angle PMO=\alpha$ 임을 증명할수 있다.

직3각형 POM에서 $OM=m\cos\alpha$

직3각형 OMB에서 $OB=\frac{2\sqrt{3}}{3}m\cos\alpha$ 이므로

$S_{밑}=6\cdot\frac{1}{2}AB\cdot OM=2\sqrt{3}m^2\cos^2\alpha$

바른각뿔이므로 $S_{옆}=\frac{S_{밑}}{\cos\alpha}$

$\therefore\ S_{전}=S_{밑}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=$

$=4\sqrt{3}m^2\cos\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$

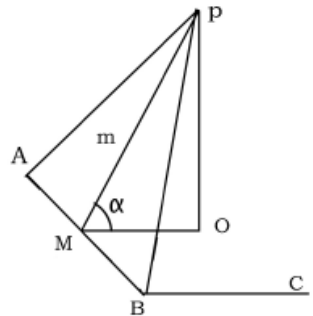



그림 2-79

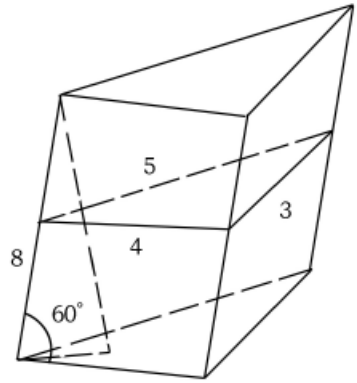
17. $V_{원기둥}: V_{반구}: V_{원뿔}=3:2:1$

$S_{원기둥}: S_{반구}: S_{원뿔}=4:2:(1+\sqrt{2})$

그림 2-80

18. (그림 2-80) 옆모서리와 자름면은 수직이므로 $V=S_{자}\cdot 8=48$이고 각기둥의 높이는 $4\sqrt{3}$, $V=S_{밑}\cdot h$이므로 $S_{밑}=4\sqrt{3}$

$\therefore\ S_{전}=8(3+4+5)+2\cdot 4\sqrt{3}=$

$=96+8\sqrt{3}$

19. (그림 2-81) 1) 조건으로부터 옆모서리의 길이는 a이고 M의 밑면에 대한 사영 O는 밑면의 무게중심이고 AO⊥BC이다.

따라서 AM⊥BC

즉 옆모서리와 밑면이 마주하고있는 모서리사이의 각은 90°이다.

BC의 가운데점 P를 취하면 △APM은 밑변이 a, 옆변이 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$인 2등변3각형이다.

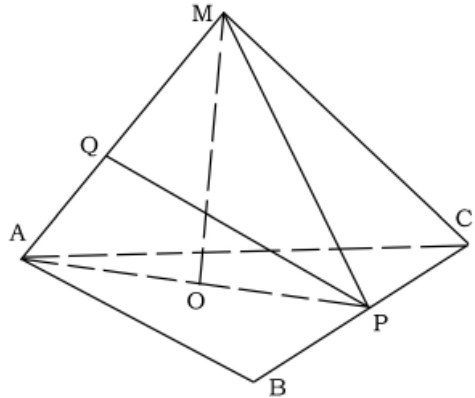



그림 2-81

AM의 가운데점을 Q라고 하면 PQ는 AM과 BC사이의 거리이다.

계산하면 $PQ=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

2) 조건으로부터 M의 밑면에 대한 사영 O는 무게중심이다. AO의 연장선이 BC와 사귀는 점을 P라고 하면 $\angle MPO=60°$임을 말할수 있다.

$AP=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad OP=\frac{\sqrt{3}}{6}$이므로 $MP=\frac{\sqrt{3}}{3}a,\quad AM=\frac{\sqrt{21}}{6}a$

P에서 AM에 그은 수직선의 밑점을 Q라고 하면 PQ가 AM과 BC사이의 거리이다.

AM · PQ＝MP · APsin60° 로부터 PQ＝$\frac{3\sqrt{7}}{14}a$이다.

20. (그림 2−82) 높이를 x라고 하면 $BC = 2x$, $PB = \sqrt{3}x$

A에서 PB에 그은 수직선의 밑점을 Q라고 하면 △APB≡△CPB이므로 CQ⊥PB

∴ ∠AQC＝α가 구하려는 각이다.

옆면의 높이는

$$\sqrt{PB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{2}x = h'$$

PB · AQ＝AB · h′로부터

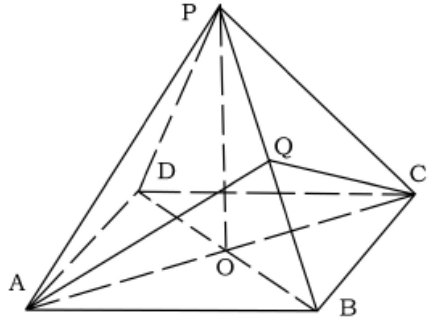
AQ＝CQ＝$\frac{2\sqrt{6}}{3}x$

△AQC에서 코시누스정리로부터

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

∴ α＝120°

그림 2−82

21. V＝84π, S＝45π

22. 원뿔대를 연장하여 원뿔을 만들었을 때 작은 원뿔의 모선을 x, 원뿔대의 모선을 ℓ라고 하면 $x = \frac{1}{2}\ell$

조건으로부터 ℓ에 관한 방정식을 만들면 $\ell = 1 + \sqrt{6}$이다.

23. 떼여버리는 부채형의 중심각을 α, 남은 부채형으로 만든 원뿔의 모선을 R, 밑면의 반경을 r라고 하면 높이는 $\sqrt{R^2 - r^2}$이고 $(2\pi - \alpha)R = 2\pi r$

∴ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$

$$= \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}r^2 \cdot r^2\left(2R^2 - 2r^2\right)} \le \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2R^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}R^3$$

$r^2 = 2R^2 - 2r^2$ 일 때　　즉　$r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$ 일 때

$(2\pi - \alpha)R = 2\pi r$ 로부터　$\alpha = 2(1 - \frac{\sqrt{6}}{3})\pi$

24. (그림 2－83)　BD, AC의 가운데점을 각각 E, F라고 하자. AB＝AD,　CB＝CD이므로　AF⊥BD,　CF⊥BD

∴　BD⊥평면 AFC

$$V_{A-BCD} = V_{B-ACF} + V_{D-ACF} = \frac{1}{3} BD \cdot S_{\triangle AFC}$$

BD＝2x라고 하면

DF＝AE＝x,　　AF＝$\sqrt{a^2 - x^2}$

△ABD≡△BCD이므로

FE⊥AC,　AF＝CF

$$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{a^2 - 2x^2}$$

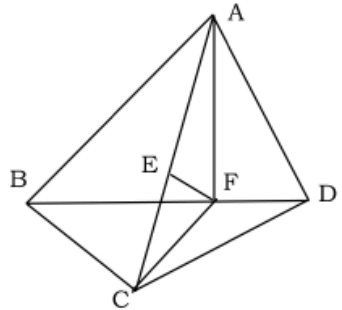
$$(0 \le x \le \frac{a}{\sqrt{2}})$$

그림 2－83

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} EF \cdot AC = x\sqrt{a^2 - 2x^2}$$

$$V_{A-BCD} = \frac{1}{3} 2x \cdot x \cdot \sqrt{a^2 - 2x^2} = \frac{2}{3} x^2 \sqrt{a^2 - 2x^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^2 \cdot x^2 (a^2 - 2x^2)} \le \frac{2\sqrt{3}}{27} a^3$$

∴　$a^2 - 2x^2 = x^2$　즉　$x = \frac{\sqrt{3}}{3} a$ 일 때　$V_{최대} = \frac{2\sqrt{3}}{27} a^3$

25. 바른3각뿔의 밑면의 변의 길이를 a라고 하면

$$S_{겉} = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^0 + 3 \times \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{3a}{4}\sqrt{4 - a^2}$$

즉　$4S - \sqrt{3}a^2 = 3a\sqrt{4 - a^2}$

두 변을 두제곱하고 정돈하면 $3a^4-(2\sqrt{3}S+9)a^2+4S^2=0$

$D=\left(2\sqrt{3}S+9\right)^2-12\times 4S^2=-9\left(4S^2-4\sqrt{3}S-9\right)\geq 0$

$\therefore \quad 4S^2-4\sqrt{3}S-9\leq 0$

2차방정식의 두 풀이는 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $0<S\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ S는 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 보다 클수 없다.

26. (그림 2－84)

$A_1B_1=2r\cdot\sin\frac{n^0}{2}$, $O_1C_1=r\cos\frac{n^0}{2}$, $A_2B_2=2R\cdot\sin\frac{n^0}{2}$,

$O_2C_2=Rr\cos\frac{n^0}{2}$ $\qquad C_2M=\left(R-r\right)\cos\frac{n^0}{2}$

$$C_1C_2=\frac{\left(R-r\right)\cos\frac{n^0}{2}}{\cos\alpha}$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}\left(A_1B_1+A_2B_2\right)\cdot C_1C_2=\frac{1}{2}\left(R^2-r^2\right)\frac{\sin n^0}{\cos\alpha}$$

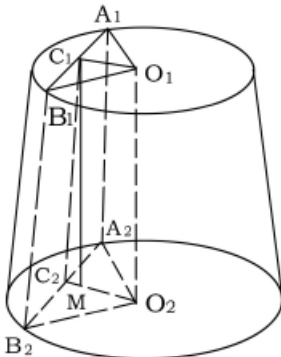



그림 2-84

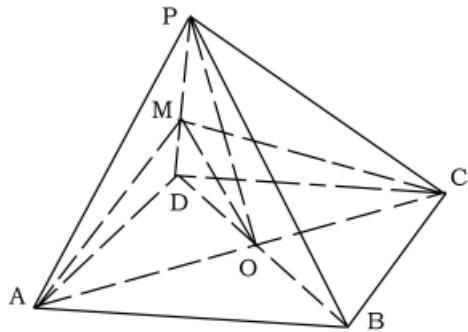



그림 2-85

27. (그림 2－85) PD의 가운데점 M을 취하면 $OM \,//\, PB$

∴ △AMC가 구하려는 자름면이다.

이 자름면에 의하여 3각뿔 M－ADC가 얻어진다. 바른4각뿔의 높이

를 h, 밑면적을 S라고 하면 3각뿔 M－ADC의 높이는 $\frac{h}{2}$, 밑면적은 $\frac{S}{2}$로 된다.

$$V_{3각뿔}=\frac{1}{3}\cdot\frac{Sh}{4}=\frac{1}{4}V_{바른4각뿔}$$

따라서 자름면은 4각뿔을 체적의 비가 1:3이 되게 두 부분으로 나눈다. $MO\perp AC$, $DO\perp AC$이므로 $\angle MOD$가 자름면과 밑면사이의 각이고 $\angle MOD=\angle PBD$이다.

$$\cos\angle PBD=\frac{PB^2+BD^2-PD^2}{2PB\cdot BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad \angle MOD=30^0$$

28. (그림 2－86) $P\in BC$에서 $PQ//CD$되게 $Q\in AD$를, $PM//AB$되게 $M\in BC$를, $MN//CD$되게 $N\in BD$를 정하면 $PQ//MN$이다.

$AQ:QD=AP:PC=BM:MC=BN:ND$이므로

$QN//AB,\quad QN//PM$

$\therefore$ 평행4변형 $PQNM$은 구하려는 자름면이다. $AP=x$, $PQ=a$, $PM=b$, $\angle PQN=\alpha$로 놓으면 $S_{자}=ab\sin\alpha$이다.

$$\frac{a}{CD}=\frac{x}{AC},\quad \frac{b}{AB}=\frac{AC-x}{A}=1-\frac{x}{AC}$$ 이므로

$$a=x\cdot\frac{CD}{AC},\quad b=AB\left(1-\frac{x}{AC}\right)$$

$$S_{자}=\frac{CD}{AC}\cdot x\cdot AB\left(1-\frac{x}{AC}\right)\sin\alpha=CD\cdot AB\cdot\sin\alpha\cdot\frac{x}{AC}\left(1-\frac{x}{AC}\right)\le$$

$$\le CD\cdot AB\cdot\sin\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}AB\cdot CD\sin\alpha$$

$$\frac{x}{AC}=1-\frac{x}{AC},\qquad x=\frac{AC}{2}$$

즉 P가 AC의 가운데점일 때 자름면의 면적이 최대로 된다.

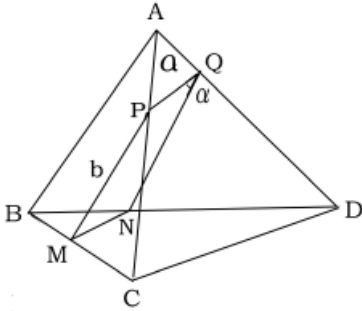



그림 2−86

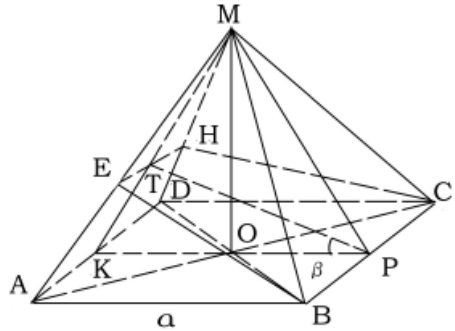



그림 2−87

29. (그림 2−87) BC, AD의 가운데점을 P, K라고 하면 ∠MPK＝α이다. △MPK에서 ∠TPK＝β되게 MK우에 T를 정하고 T를 지나 AB에 평행선을 그어 MA, MD와 사귀는 점을 각각 E, H라고 하자.(분명히 $\beta<\alpha$ 그렇지 않으면 자름면은 존재하지 않는다.)

BC⊥평면 MPK이므로 BC⊥PT, KP⊥BC.

∴ β＝∠TPK가 자름면과 밑면이 만드는 2면각의 평면각이다.

∴ 바른제형 EHCB는 구하려는 자름면이다.

△MPK에서 $\dfrac{TP}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$\therefore\quad TP=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\qquad MK=\frac{a}{2\cos\alpha}=MP$$

$$\frac{MT}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{MP}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a}{2\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}$$

$$MT=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}$$

$\dfrac{EH}{AD}=\dfrac{MT}{MK}$ 이므로 $EH=\dfrac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$S_{자}=\frac{1}{2}(EH+BC)PT=\frac{a}{2}\left[\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}+1\right]\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

30. (그림 2−88) $\frac{5}{10}=\frac{OA}{OA+20}$이므로

$$OA=20,\quad \alpha=\frac{2\pi\cdot 10}{40}=\frac{\pi}{2}$$

직3각형 MOB에서 OM=30, OB=40이므로 MB=50

즉 개미가 가는 가장 짧은 거리는 50이다.

O에서 MB에 그은 수직선의 밑점을 Q, 웃밑면의 둘레와 사귀는 점을 P라고 하면 PQ가 구하려는 가장 짧은 거리이다.

직3각형 MOB에서 $OQ=\frac{OM\cdot OB}{MB}=24$

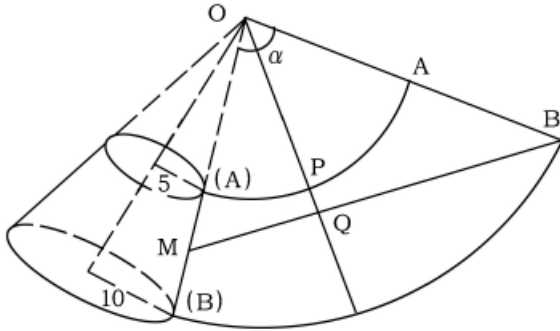



그림 2−88

31. (그림 2−89) $AA'=2AP=2\cdot 30\cdot\sin\frac{\pi}{3}=30\sqrt{3}$

∴ 가장 짧은 경로는 $30\sqrt{3}$이다.

이 로정의 점으로부터 V까지의 거리가 최소로 되자면 그 점으로부터 밑면까지의 거리가 최대로 되여야 한다.

즉 모선 VB와 로정과의 사귐점 P로부터 밑면까지의 거리가 최대로 되여야 한다.

$VP=VA\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=15$이므로 P는 VB의 가운데점이다.

직3각형에서 PQB에서 $PQ=\sqrt{PB^2-BQ^2}=10\sqrt{2}$ (㎝)

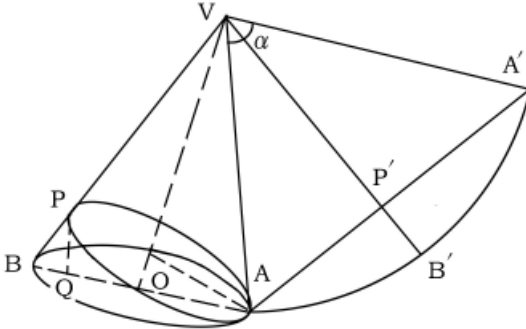



그림 2-89

32. (그림 2-90) OA를 모선으로 하는 원뿔의 전개도가 부채형 OMN이고 부채형에서 A의 위치가 A_1, A_2라고 하자.

$OA_1=OA_2=OA=15$㎝

A_1BA_2이 가장 짧은 로정이고 B가 A_1A_2의 가운데점일 때 OA가 최소로 된다.

$A_1B=BA_2=12$이므로 $OB=\sqrt{OA_1^2-A_1B^2}=9$ (㎝)

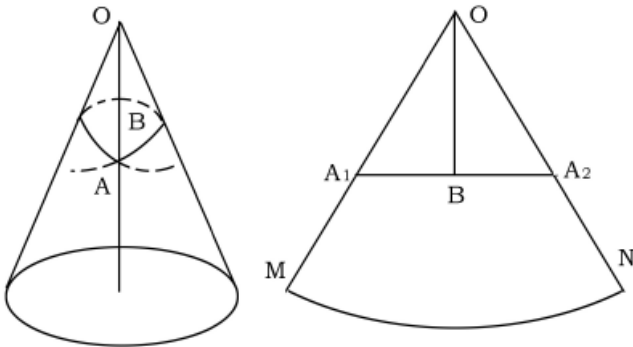



그림 2-90

33. (그림 2-91)구관의 높이를 x, 밑면의 반경을 r, 구의 반경을 R라고 하면

$S_{구관} = 2\pi Rx, \quad R - x = \dfrac{R^2}{R+h}$

x 를 소거하면 $S = \dfrac{2\pi hR^2}{R+h}$

만일 $S = \dfrac{1}{15} 4\pi R^2 = \dfrac{2\pi hR^2}{R+h}$ 이면

$$h = \frac{2R}{13}$$

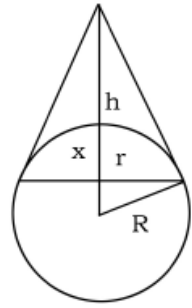



그림 2-91

34. (그림 2—92) $V_{반구} = \dfrac{2}{3}\pi R^3$ (즉 물의 체적)

경사지게 한 후 남은 물은 결구를 만든다.

경사각이 45°이므로 결구의 밑면의 반경은 $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(R - \frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2\left(3R - R + \frac{\sqrt{2}}{2}R\right) =$$

$$= \frac{\pi R^3}{12}\left(8 - 5\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{V}{V_{반구}} = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{8} = 12\%$$

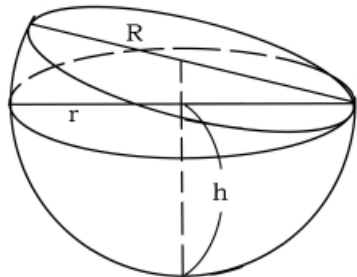



그림 2-92

35. (그림 2—93) 1) 조건으로부터

$\angle AOB = \angle COD = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \angle AOC = \beta_2, \quad \angle BOD = \beta_1$

점 A, B를 지나는 작은 원의 반경을 r라고 하면

$$OO_1^2 = R^2 - r^2 = BD^2 - (R - r)^2$$

$$BD^2 = 2R^2 - 2R\cos\beta_1$$

$$\therefore \quad R^2 - r^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\beta_1 - R^2 + 2Rr - r^2$$

$$r = R\cos\beta_1$$

마찬가지로 하면 $r = R\cos\beta_2$

$$\therefore \quad \cos\beta_1 = \cos\beta_2, \qquad \sin\beta_1 = \sin\beta_2$$

$$\cos\angle AOB = \frac{2R^2 - AB^2}{2R^2} = 1 - \frac{AB^2}{2R^2}$$

$$AB^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

이 식을 웃식에 갈아넣으면

$$\cos\angle AOB = \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

2) $\cos\angle AOB = \sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \quad \angle AOB = \frac{5\pi}{12}$$

$$\therefore \quad \overset{\frown}{AB} = 6400\cdot\frac{5\pi}{12} = \frac{8000\pi}{3} \text{ (km)}$$

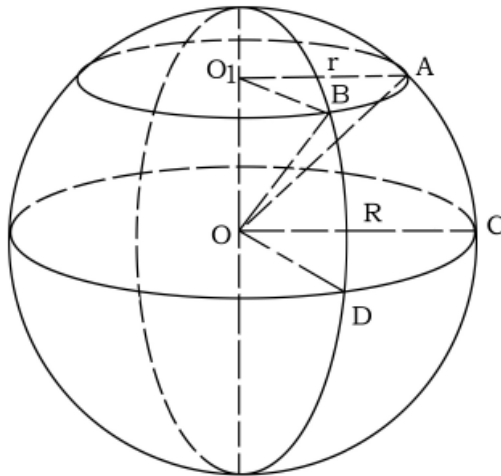



그림 2-93

제 3 장 도형의 방정식

1. 원둘레의 방정식

1) 원둘레의 방정식 (그림 3−1)

ㄱ. 중심이 (a, b)이고 반경이 R인 원둘레의 방정식

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

ㄴ. 원둘레의 일반방정식

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

ㄷ. 원둘레의 보조변수방정식

$$\begin{cases} x=a+R\cos\theta \\ y=b+R\sin\theta \end{cases} \quad (\theta : \text{보조변수})$$

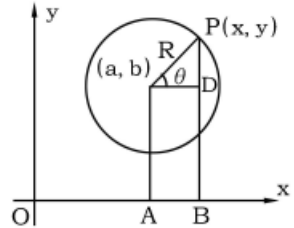



그림 3−1

2) 원둘레와의 자리관계

ㄱ. 원둘레와 점과의 자리관계

P$(x_{\circ}, y_{\circ})$이고 원둘레 C의 방정식이 $f(x, y)=0$일 때

· $f(x_{\circ}, y_{\circ})=0$이면 점 P는 원둘레 C에 놓인다.

· $f(x_{\circ}, y_{\circ})<0$이면 점 P는 원둘레 C의 아낙에 있다.

· $f(x_{\circ}, y_{\circ})>0$이면 점 P는 원둘레 C의 바깥에 있다.

점 P에서 원둘레까지의 최대거리는 그림 3−2에서 보는바와 같이 점 P와 중심 O를 지나는 직선의 원둘레와 사귀는 점을 각각 A, B라고 할 때 PA≥PB이면 PA이고 최소거리는 PB이다.

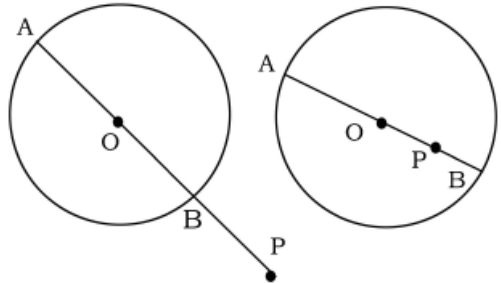



그림 3−2

ㄴ. 원둘레와 직선의 자리관계

원둘레의 방정식이 $f(x,\ y)=0$, 직선의 방정식이 $g(x,\ y)=0$일 때 련립방정식 $\begin{cases} f(x,\ y)=0 \\ g(x,\ y)=0 \end{cases}$이 두쌍의 서로 다른 풀이를 가지면 원둘레와 직선은 사귀며 한쌍의 풀이를 가지면 직선은 원둘레에 접하고 풀이를 가지지 않으면 직선과 원둘레는 서로 떨어져있다.

ㄷ. 두 원둘레의 자리관계

두 원둘레의 방정식들로 이루어진 련립두변수2차방정식이 두쌍의 서로 다른 풀이를 가지면 두 원둘레는 사귀며 한쌍의 풀이를 가지면 접하고 풀이를 가지지 않으면 서로 떨어져있다.

3) 문제풀이의 묘리

원둘레의 방정식 구하기문제

[례1] 두 직선이 각각 일정한 점 A(a,0), B($-a$, 0)를 지나면서 움직인다. 또한 두 직선의 y단편이 각각 m, n이고 $mn=a^2$이다.

이 두 직선의 사귐점의 자리길방정식을 구하여라

(설명) 두 직선은 각각 $(a,\ 0)$과 (0, m) 및 ($-a$, 0), (0, n)을 지나므로 $\ell_1 : \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{m}=1$, $\ell_2 : \dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{n}=1$로 놓을수 있다.

ℓ_1과 ℓ_2의 사귐점을 P$(x,\ y)$라고 하면

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{m}=1 \\ \dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{n}=1 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{ay}{a-y} \\ n=\dfrac{ay}{a+x} \end{cases}$$ 이며 $mn=a^2$이므로

$$\frac{a^2y^2}{a^2-x^2}=a^2 \quad \Rightarrow x^2+y^2=a^2$$

따라서 구하려는 자리길은 (0, 0)을 중심으로 하고 $|a|$를 반경으로 하는 원둘레이다.

[례2] △ABC에서 A(2, −2), B(5, 3), C(3, −1)일 때 이 3각형의 외접원둘레의 방정식을 구하여라.

(설명) **첫째 방법**: 구하려는 원둘레의 방정식을 $x^2+y^2+Dx+Ey+$ $+F=0$ 으로 놓으면 세 점 A, B, C는 원둘레에 있으므로

$$\begin{cases} 4+4+2D-2E+F=0 \\ 25+9+5D+3E+F=0 \\ 9+1+3D-E+F=0 \end{cases}$$

이 식을 풀면 D＝8, E＝－10, F＝－44

그러므로 구하려는 방정식은 $x^2+y^2+8x-10y-44=0$

둘째 방법: 3각형의 외접원의 중심은 세 변의 수직2등분선의 사귐점이다. 그러므로 외접원의 중심은 두 변의 수직2등분선의 사귐점이고 반경은 그 사귐점으로부터 한 정점까지의 거리이다.

AB의 수직2등분선과 AC의 수직2등분선의 방정식은 각각 $3x+5y-13=0$, $x+y-1=0$ 이며 이 두 방정식으로부터 두 직선의 사귐점 즉 원의 중심 P(－4, 5)를 얻는다.

원의 반경은 PA＝$\sqrt{85}$

∴ 구하려는 원둘레의 방정식은 $(x+4)^2+(y-5)^2=85$

[례3] 중심이 직선 $y=-4x$ 우에 있고 직선 $x+y=1$ 과 점 P(3, －2)에서 접하는 원둘레의 방정식을 구하여라.

(설명) (그림3－3)

첫째 방법: 원둘레의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 으로 놓으면 문제의 의미로부터

$$\begin{cases} b=-4a \\ (3-a)^2+(-2-b)^2=R^2 \\ \dfrac{|a+b-1|}{\sqrt{2}}=R \end{cases}$$

이 식을 풀면

$a=1,\quad b=-4,\quad R=2\sqrt{2}$

따라서 원둘레의 방정식은

$(x-1)^2+(y+4)^2=8$

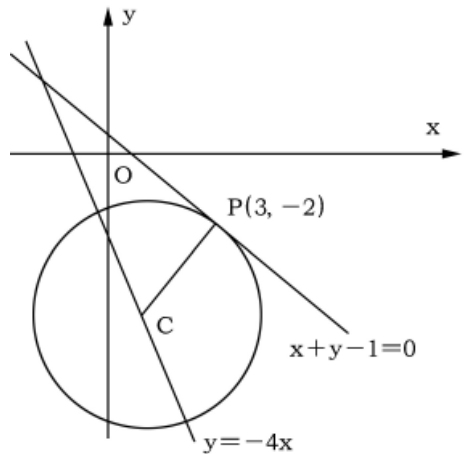



그림 3－3

둘째 방법: 그림 3－3에서와 같이 원의 중심을 C로 놓으면 PC⊥ℓ이므로 직선 PC의 방정식은 $y+2=x-3$이다. 직선 $x+y=1$을 ℓ로 하자.

따라서 원의 중심은

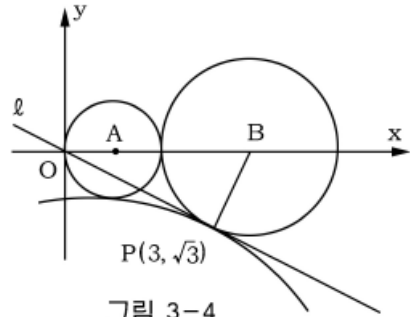
$$\begin{cases} y+2=x-3 \\ y=-4x \end{cases} \Rightarrow C(1,\ -4)\ ,\quad R=PC=2\sqrt{2}$$

즉 원둘레의 방정식은 $(x-1)^2+(y+4)^2=8$

[례4] 원둘레 $x^2+y^2-2x=0$에 접하며 직선 $\ell: x+\sqrt{3}y=0$과 점 $(3,\ -\sqrt{3})$에서 접하는 원둘레의 방정식을 구하여라.

그림 3－4

(설명) 구하려는 원둘레의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$으로 놓자.

그림 3－4에서 보는바와 같이 BP⊥ℓ, 원둘레 A의 중심은 (1, 0)이고 반경은 R＝1이다.

구하려는 원의 중심을 B라고 하면 AB는 두 반경의 합이므로

$$\begin{cases} AB=R_A+R_B \\ K_{BP}\cdot K_L=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-1)^2+b^2}=1+\sqrt{(a-3)^2+(b+\sqrt{3})^2} \\ \dfrac{b+\sqrt{3}}{a-3}\cdot(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-1)^2+3(a-4)^2}=2|a-3|+1$$

ㄱ. $a\geq 3$일 때

$$\sqrt{(a-1)^2+3(a-4)^2}=2(a-3)+1 \Rightarrow a=4,\quad b=0,\quad R=2$$

∴ 원둘레의 방정식은 $(x-4)^2+y^2=4$

ㄴ. $a<3$일 때

$$\sqrt{(a-1)^2+3(4-a)^2}=2(3-a)+1 \Rightarrow a=0,\quad b=-4\sqrt{3},\quad R=6$$

∴ 원둘레의 방정식은 $x^2+(y+4\sqrt{3})^2=36$

[례5] 반경이 1이고 원둘레 $O: x^2+y^2=4$와 점 P$(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2})$에서 접하는 원둘레의 방정식을 구하여라.

(설명) 원둘레 O에 외접하는 경우와 내접하는 경우가 있다.

외접할 때 중심사이의 거리는 $PO+PO_1=2+1=3$

내접할 때 중심사이의 거리는 $PO-PO_1=2-1=1$

$O_1(x_o, y_o)$으로 놓으면 외접하는 경우에

$$\begin{cases} x_o^2+y_o^2=9 \\ (x_o-\frac{3}{2})^2+(y_o-\frac{\sqrt{7}}{2})^2=1 \end{cases} \Rightarrow (\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{7}}{4})$$

∴ 원둘레의 방정식은 $(x-\frac{9}{4})^2+(y-\frac{3\sqrt{7}}{4})^2=1$

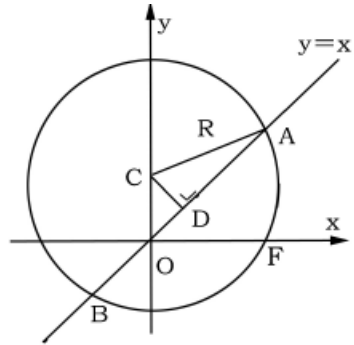
마찬가지로 내접하는 경우의 원둘레방정식을 구한다.

[례6] 원둘레 C는 y축에 관하여 대칭이고 포물선 $y^2=4x$의 모임점을 지나며 직선 $y=x$에 의하여 잘리운 두 활등의 길이의 비는 1:2 이다. 이 원둘레의 방정식을 구하여라.

(설명) (그림3-5) 원둘레가 y축에 관하여 대칭이므로 구하려는 원둘레의 방정식은 $x^2+(y-b)^2=R^2$

$y^2=4x$가 모임점 F(1, 0)을 지나므로 $1+b^2=R^2$ ①

그림 3-5

CD가 (0, b)으로부터 직선 $y=x$까지의 거리이므로 $CD=\frac{|b|}{\sqrt{2}}$

$y=x$에 의하여 나누어지는 부분의 길이의 비가 1:2이므로 ∠ACB=120°이며

∴ ∠ACD=60°, AD=$\frac{\sqrt{3}}{2}R$

직3각형 ADC에서 $AC^2=AD^2+CD^2$이므로

$$R^2=(\frac{|b|}{\sqrt{2}})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}R)^2 \Rightarrow R^2=2b^2 \qquad ②$$

①, ②로부터 $b^2=1$ 즉 $b=\pm 1,\quad R^2=2$

∴ 원둘레의 방정식은

$x^2+(y+1)^2=2$ 또는 $x^2+(y-1)^2=2$

[례7] 원점을 지나며 원 $C_1: x^2+y^2-6x+8y=0,\ \ C_2: x^2+y^2-2x-$ $-2y-7=0$ 과 직교하는 원둘레의 방정식을 구하여라

(설명) 두 원둘레가 직교한다는것은 두 원둘레의 사귐점에서 매 원에 그은 접선들이 수직을 이룬다는것이다. 그러므로 두 원이 직교하는 경우에 사귐점과 두 중심을 정점으로 하는 3각형은 직3각형으로 된다. 구하려는 원둘레는 원점을 지나므로 방정식을 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$ 으로 놓을수 있다.

이때 원의 중심은 $(-\frac{D}{2},\ \ -\frac{E}{2})$, 반경은 $\frac{\sqrt{D^2+E^2}}{2}$ 이다.

이 원과 C_1 이 직교하고 $C_1(3,\ \ -4),\ \ R_{C_1}=5$ 이므로

$$(-\frac{D}{2}-3)^2+(-\frac{E}{2}+4)^2=(\frac{D}{2})^2+(\frac{E}{2})^2+25 \Rightarrow 3D-4E=0$$

마찬가지로 하면 D＋E＝7

이 두식으로부터 D＝4, E＝3

∴ 원둘레의 방정식은 $x^2+y^2+4x+3y=0$

[례8] 중심이 직선 $x-3y=0$ 우에 있고 y축에 접하며 직선 $y=x$ 가 이 원둘레에 의하여 잘리워 생긴 선분(활줄)의 길이가 $\sqrt{7}$ 이다. 이 원둘레의 방정식을 구하여라.

(설명) 원의 중심이 직선 $x-3y=0$ 우에 있으므로 원의 중심은 $(3a,\ a)$ 이며 y축에 접하므로 반경은 $R=|3a|$ 로 된다.

∴ 원둘레의 방정식을 $(x-3a)^2+(y-a)^2=9a^2$ 로 놓을수 있다.

$y=x$ 가 잘리워 생긴 활줄의 길이가 $\sqrt{7}$ 이므로

$$9a^2 = (\frac{|3a-a|}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

∴ 원둘레의 방정식은

$$(x-\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \quad \text{또는} \quad (x+\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

[례9] 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$의 아낙에 원둘레가 있는데 긴 축의 오른쪽에서 타원과 짧은 축에 접하고있다. 이 원둘레의 방정식을 구하여라. (그림 3－6)

(설명) 문제의 의미로부터 원의 중심은 x축우에 있다.

원의 중심을 $C(a, 0)$으로 놓으면 짧은 축에 접하므로 중심 C로부터 짧은 축까지의 거리 $|a|$가 원의 반경으로 된다. 원과 타원의 한 접점을 $M(x_0, y_0)$이라고 하면 접점 M을 지나는 타원의 접선의 방정식은

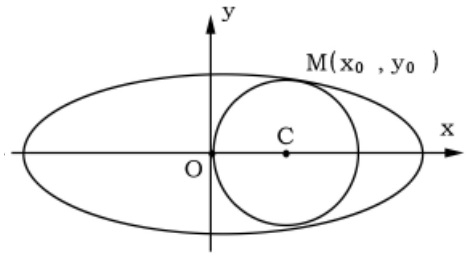



그림 3－6

$x \cdot x_0 + 4y \cdot y_0 = 16$이고 접점 M을 지나는 원의 접선의 방정식은

$$x \cdot x_0 - 2a \cdot \frac{x+x_0}{2} + y \cdot y_0 = 0 \quad \text{즉} \quad (x_0 - a)x + y_0 \cdot y = ax_0$$

이 두 방정식은 동일한 접선을 나타내므로

$$x_0 \cdot y_0 = 4y_0(x_0 - a), \quad ax_0^2 = 16(x_0 - a)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 3x_0 = 4a \\ ax_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 3,\ a = \sqrt{3} \quad (a = -\sqrt{3} \text{ 은 버린다.})$$

∴ 원둘레의 방정식은 $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 3$

원의 가름선과 활줄의 길이 구하기문제

[례1] 직선 $x+2y-2=0$ 이 원둘레 $x^2+y^2=2$ 에 의하여 잘리운 부분(활줄의 길이)을 구하여라.

(설명) **첫째 방법:** $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow 5y^2-8y+2=0$

$$\therefore \quad y_1+y_2=\frac{8}{5}, \quad y_1\cdot y_2=\frac{2}{5}$$

활줄의 길이$=\sqrt{(y_1-y_2)^2(1+\frac{1}{k^2})}=$

$$=\sqrt{\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right](1+\frac{1}{k^2})}=$$

$$=\sqrt{\left[\left(\frac{8}{5}\right)^2-4\cdot\frac{2}{5}\right](1+4)}=\frac{2}{5}\sqrt{30} \quad (\text{여기서 } k=-\frac{1}{2})$$

둘째 방법: (그림3−7) 점 O에서 AB에 그은 수직선의 밑점을 D라고 하면 $OD=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 이고 OA=R=$\sqrt{2}$ 이므로

직3각형 ADO에서

$$AD=\sqrt{R^2-OD^2}=\frac{\sqrt{30}}{5}$$

$$\therefore \quad AB=2AD=\frac{2\sqrt{30}}{5}$$

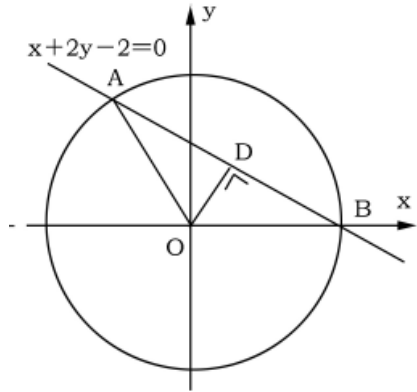



그림 3−7

[례2] 변화률이 2인 직선과 원둘레 $x^2+y^2=25$ 가 사귀는데 이때 생기는 활줄의 길이가 8이다. 직선의 방정식을 구하여라.

(설명) **첫째 방법:** 직선의 방정식을 $y=2x+b$ 로 놓자.

원의 반경은 5, 활줄의 길이의 절반은 4이므로 피타고라스정리에 의하여 중심에서 활줄까지의 거리는 3이다.

$$3=\frac{|b|}{\sqrt{4+1}} \quad \Rightarrow \quad b=\pm 3\sqrt{5}$$

즉 구하려는 직선의 방정식은 $y=2x\pm 3\sqrt{5}$

둘째 방법: 직선의 방정식을 $y=2x+b$ 로 놓자.

$$\begin{cases} y=2x+b \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Rightarrow \quad 5x^2+4bx+b^2-25=0$$

$$\therefore 8=\sqrt{\left[\ (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]\left(1+k^2\right)}=$$

$$=\sqrt{\left[\ \left(\frac{4b}{5}\right)^2-4\cdot\frac{b^2-25}{5}\right]\cdot 5}=\sqrt{\frac{-4b^2+500}{5}}$$

$$\therefore \quad b^2=45, \quad b=\pm 3\sqrt{5}$$

즉 구하려는 직선의 방정식은 $y=2x\pm 3\sqrt{5}$

[례3] 원둘레 $x^2+y^2=R^2$ 아낙의 한 점 $A(a\ ,\ b)$를 지나며 이때 생기는 활줄이 점 A에 의하여 2등분되는 직선의 방정식을 구하여라.

(설명) **첫째 방법:** a, b가 모두 0이 아닐 때 $K_{oA}=\frac{b}{a}$ 이므로

활줄의 변화률은 $-\frac{a}{b}$ 이다.

따라서 활줄이 놓이는 직선의 방정식은 $y-b=-\frac{a}{b}(x-a)$

즉 $ax+by=a^2+b^2$

$a=0, \quad b\neq 0$ 일 때 직선의 방정식은 $y=b$

$a\neq 0, \quad b=0$ 일 때 직선의 방정식은 $x=a$

따라서 구하려는 직선의 방정식은 $ax+by=a^2+b^2$

둘째 방법: $A(a,\ b)$가 활줄의 가운데점이므로 활줄의 한 끝점을 $B(x_1,\ y_1)$로 놓으면 다른 끝점의 자리표는 가운데점의 자리표공식으로부터 $C(2a-x_1,\ 2b-y_1)$

B, C가 원둘레우에 있으므로

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=R^2 & ① \\ (2a-x_1)^2+(2b-y_1)^2=R^2 & ② \end{cases}$$

①−②　$ax_1+by_1=a^2+b^2$
따라서 구하려는 방정식은　$ax+by=a^2+b^2$

원의 접선의 방정식 구하기문제

[례1] 두 직선 $3x+y-5=0$과 $2x-3y+4=0$의 사귐점 A를 지나며 $x^2+y^2=1$에 접하는 접선의 방정식을 구하여라.

(설명) **첫째 방법:** $\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases} \Rightarrow A(1,\ 2)$

A는 원둘레에 놓이지 않는다. 점 A를 지나는 접선의 방정식을 $y-2=k(x-1)$로 놓으면 원 $x^2+y^2=1$의 중심이 (0, 0), 반경이 1이므로 원의 중심으로부터 접선까지의 거리는

$$\frac{|2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \Rightarrow k=\frac{3}{4}$$

A를 지나는 접선이 2개이므로 다른 한 접선의 변화률 K는 존 재하지 않는다. 그러므로 그의 접선은 $x=1$이다.

따라서 구하려는 접선의 방정식은 $3x-4y+5=0$, $x=1$

둘째 방법: 접점을 $P(x_0,\ y_0)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$xx_0+yy_0=1$$

$$\therefore \begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases} \Rightarrow A(1,\ 2)$$

점 A가 접선우에 있으므로　$x_0+2y_0=1$　①
점 P가 원둘레우에 있으므로　$x_0^2+y_0^2=1$　②

①, ②로부터 $\begin{cases} x_0=-\dfrac{3}{5} \\ y_0=\dfrac{4}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases}$

따라서 접점은 $(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5})$ 또는 (1, 0)

즉 접선의 방정식은　$3x-4y+5=0$　또는　$x=1$

[례2] 직선 ℓ의 변화률이 $-\frac{2}{3}$이고 ℓ과 원 $x^2+y^2=13$이 서로 접한다. 직선 ℓ의 방정식을 구하여라.

(설명) **첫째 방법:** 직선의 방정식을 $y=-\frac{2}{3}x+b$로 놓자.

직선과 원이 접하므로 원의 중심으로부터 직선까지의 거리는 원의 반경과 같다.

즉 $\frac{|-3b|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13} \Rightarrow b=\pm\frac{13}{3}$

따라서 접선의 방정식은 $2x+3y-13=0$, $2x+3y+13=0$

둘째 방법: 직선의 방정식을 $y=-\frac{2}{3}x+b$로 놓자

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+b \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Rightarrow 13x^2-12bx+9b^2-117=0$$

직선과 원이 접하므로 이 방정식은 1개의 실수풀이를 가진다.

$\therefore \quad D=(12b^2)-4\cdot 13(9b^2-117)=0, \quad 9b^2=169, \quad b=\pm\frac{13}{3}$

접선의 방정식은 $2x+3y-13=0$, $2x+3y+13=0$

셋째 방법: 직선의 방정식을 $y=-\frac{2}{3}x+b$로 놓자.

접점을 $\mathrm{M}(x_1,\ y_1)$라고 하면 점 M을 지나는 원의 접선의 방정식은

$$xx_1+yy_1=13$$

우의 두 식은 같은 접선을 나타내므로 두 직선이 일치하기 위한 조건으로부터 $3x_1=2y_1$, $3bx_1=26$

$\therefore \ x_1=\frac{26}{3b}, \quad y_1=\frac{13}{b}$

또한 $x_1^2+y_1^2=13$이므로 $(\frac{26}{3b})^2+(\frac{13}{b})^2=13 \Rightarrow b=\pm\frac{13}{3}$

$\therefore \ x_1=\pm 2, \quad y_1=\pm 3$

그러므로 구하려는 접선의 방정식은 $2x+3y-13=0$, $2x+3y+13=0$

[례3] 실수 $a(a \neq 1)$에 대하여 모임

$M = \{(x,\ y) | x^2 - 2ax + y^2 + 2(a-2)y + 2 = 0\}$이 있다고 하자. 모든 원둘레 M에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

(설명) 직선의 방정식을 $Ax + By + C = 0$ (A, B는 동시에 0이 아니다.)이라고 하자.

원둘레 M의 방정식은 $(x-a)^2 + [y + (a-2)]^2 = 2(a-1)^2$이므로 중심은 $(a,\ 2-a)$, 반경은 $\sqrt{2}|a-1|$이다.

중심에서 직선까지의 거리는 반경과 같으므로

$$\frac{|aA + (2-a)B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{2}|a-1| \qquad (a \neq 1)$$

이 식을 정돈하면

$$(A+B)^2 a^2 - (4A^2 + 4AB + 2AC - 2BC)a + 2A^2 - 2B^2 - 4BC - 4C^2 = 0$$

직선과 원이 접하므로 이 식은 a에 관하여 늘 같기식이 성립한다.

$$\therefore \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A^2 + 4ab + 2AC - 2BC = 0 \\ 2A^2 - 2B^2 - 4BC - C^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ C = 0 \end{cases}$$

즉 접선의 방정식은 $x - y = 0$

[례4] 원 $x^2 + y^2 = 2$의 한 접선과 자리표축에 의하여 둘러막힌 3각형의 면적이 2이다. 이 접선의 방정식을 구하여라.

(설명) 접점의 자리표를 (x_1, y_1)라고 하면 원의 접선의 방정식은

$$xx_1 + yy_1 = 2$$

접선의 x단편, y단편은 각각 $\dfrac{2}{x_1}$, $\dfrac{2}{y_1}$이므로 3각형의 면적은

$$S = \frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_1}\right| \cdot \left|\frac{2}{y_1}\right| = 2 \qquad \therefore \quad |x_1 y_1| = 1$$

$x_1{}^2 + y_1^2 = 2$이므로 $\quad x_1 = y_1 = \pm 1$

따라서 접선의 방정식은 $x \pm y - 2 = 0$, $\quad x \pm y + 2 = 0$

[례5] 원둘레 $C_1 : x^2+y^2+2x+6y+9=0$,

$C_2 : x^2+y^2-6x+2y+1=0$의 공통접선의 방정식을 구하여라.

(설명) $C_1 : (x+1)^2+(y+3)^2=1$, $C_2 : (x-3)^2+(y+1)^2=9$이므로

C_1의 중심은 (－1, －3), 반경은 $r_1=1$이다.

C_2의 중심은 (3, －1), 반경은 $r_2=3$이다.

그림 3－8에서와 같이 $C_1Q // C_2P$이므로

$\frac{C_1M}{MC_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}$이고 M은 외분점이다.

$\therefore \quad x=-\frac{1}{3}$

점 M의 자리표는

$$x_M=\frac{-1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 3}{1-\frac{1}{3}}=-3,\quad y_M=\frac{-3+\left(-\frac{1}{3}\right)(-1)}{1-\frac{1}{3}}=-4$$

따라서 점 M을 지나는 접선의 방정식은 $y+4=k(x+3)$

즉 $kx-y+3k-4=0 \quad (l)$

C_1의 중심으로부터 (l)까지의 거리는 반경 1이므로

$$\frac{|-K+3+3K-4|}{\sqrt{K^2+1}}=1 \Rightarrow K=0 \quad \text{또는} \quad K=\frac{4}{3}$$

이것을 (l)에 갈아넣으면 공통외접선의 방정식을 얻는다.

즉 $y+4=0,\quad 4x-3y=0$

마찬가지로 $N\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$를 얻는다.

공통내접선의 방정식을 $y+2.5=kx$로 놓자.

C_1의 중심으로부터 이 접선까지의 거리는 1이므로

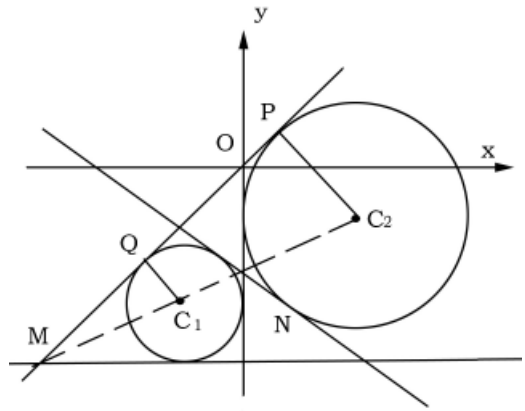
$$\frac{|-2k+6-5|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \Rightarrow k=-\frac{3}{4}$$

따라서 공통내접선의 방정식은

$$3x+4y+10=0$$

다른 접선의 변화률 k 는 존재하지 않으므로 $x=0$ 이다.

그림 3-8

[례6] 점 P(x₀, y₀)에서 원둘레 $x^2+y^2=R^2$ 에 두개의 접선을 긋고 접점을 각각 P_1, P_2 라고 할 때 직선 P_1P_2 의 방정식을 구하여라.

(설명) **첫째 방법:** 접점을 $P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$ 라고 하면 P_1 을 지나는 접선의 방정식은 $x\cdot x_1+y\cdot y_1=R^2$, P_2 을 지나는 접선의 방정식은 $x\cdot x_2+y\cdot y_2=R^2$ 이다.

$P(x_0,\ y_0)$ 은 접선우에 있으므로

$$\begin{cases} x_0\cdot x_1+y_0\cdot y_1=R^2 \\ x_0\cdot x_2+y_0\cdot y_2=R^2 \end{cases} \qquad (*)$$

(*)로부터 P_1, P_2 은 직선 $x_0\cdot x+y_0\cdot y=R^2$ 우에 있다.

$\therefore$ P_1, P_2 을 지나는 직선의 방정식은

$$x_0\cdot x+y_0\cdot y=R^2$$

둘째 방법: P, P_1, P_2, 원의 중심 O는 한 원둘레에 있으므로 P_1P_2 는 이 원과 주어진 원의 공통활줄이다.

OP를 직경으로 하는 원둘레의 방정식은

$$(x-\frac{x_0}{2})^2+(y-\frac{y_0}{2})^2=(\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2})^2$$

즉 $x^2-xx_0+y^2-yy_0=0$

$$\begin{cases} x^2-xx_0+y^2-yy_0=0 \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow\ xx_0+yy_0=R^2$$

직선과 원의 자리관계문제

[례1] 원둘레 $C: x^2+y^2-2x=0$ 과 직선 $\ell: 3x+4y+m=0$ 은 m 이 어떤 값일 때 서로 사귀는가, 접하는가, 떨어져있는가?

(설명) $C:(x-1)^2+y^2=1$ 로부터 C의 중심은 (1, 0), 반경은 1이다. 원의 중심으로부터 직선 ℓ 까지의 거리와 반경을 비교하면 된다.

$\frac{|3+m|}{\sqrt{9+16}}<1 \Rightarrow m\in(-8,\ 2)$ 일 때 서로 사귄다.

$\frac{|3+m|}{\sqrt{9+16}}=1 \Rightarrow m\in-8,\quad m=2$ 일 때 서로 접한다.

$\frac{|3+m|}{\sqrt{9+16}}>1 \Rightarrow m\in(-\infty,\ -8)\cup(2,\ +\infty)$ 일 때 서로 떨어져있다.

[례2] 원둘레 $C: x^2+y^2-6mx-2(m-1)y+10m^2-2m-24=0$ $(m\in R)$ 이 주어졌다.

1) m 이 어떤 값인가에 관계없이 원의 중심은 모두 한직선 ℓ 우에 있다는것을 증명하여라.

2) ℓ 에 평행인 직선들가운데서 어느 경우에 원들과 사귀는가, 접하는가, 떨어져있는가.

3) ℓ 에 평행이고 원둘레와 사귀는 임의의 직선이 매 원에서 잘리우는 부분의 길이와 서로 같다는것을 증명하여라.

(설명) 1) 주어진 원둘레의 방정식을 변형하면

$$(x-3m)^2+\left[y-(m-1)\right]^2=25$$

따라서 원의 중심은 $(3m,\ \ m-1)$

만일 중심을 $(x,\ \ y)$ 라고 놓으면

$$\begin{cases} x=3m \\ y=m-1 \end{cases} \Rightarrow x-3y-3=0$$

즉 m 의 값에 관계없이 원의 중심은 직선 $x-3y-3=0$ 에 놓인다.

2) 직선 ℓ 에 평행인 직선을 $\ell': x-3y+n=0$ 이라고 하면

중심 $(3m,\ m-1)$ 로부터 직선 ℓ' 까지의 거리는 $d=\frac{|3+n|}{\sqrt{10}}$ 이다.

d<5 일 때

즉 $\frac{|3+n|}{\sqrt{10}}<5 \Rightarrow n\in(-3-5\sqrt{10},\ -3+5\sqrt{10})$ 일 때 직선과 원둘레는 사귄다.

d=5일 때 즉 $n=-3\pm5\sqrt{10}$ 일 때 직선과 원은 접한다.

d>5일 때 즉 $n\in(-\infty,\ -3-5\sqrt{10})\cup(-3+5\sqrt{10},\ +\infty)$ 일 때 직선은 원과 떨어져있다.

3) $n\in(-3-5\sqrt{10},\ -3+5\sqrt{10})$ 일 때 활줄의 길이는 반경 R, 중심에서 활줄까지의 거리 d사이에는 피타고라스정리에 의하여 다음의 관계가 있다.

활줄의 길이$=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{25-\frac{(3+n)^2}{10}}=\frac{1}{5}\sqrt{10(-n^2-6n+241)}$

이 식은 m 에 무관계하다.

따라서 잘리우는 부분(활줄)의 길이는 서로 같다.

[례3] 두 모임 $M=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ y=\sqrt{9-x^2},\quad y\neq0\right\}$,

$N=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ y=x+b\right\}$에 대하여 $M\cap N\neq\varnothing$ 로 되는 b의 값범위를 구하여라.

(설명) $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=x+b\end{cases}\Rightarrow\ 2x^2+2bx+b^2-9=0$

직선과 원둘레가 공통점을 가지면

$$D=-4b^2+72\geq0$$

$$\therefore\ -3\sqrt{2}\leq b\leq3\sqrt{2}$$

그런데 $y=x+b$와 원둘레 $x^2+y^2=9$의 x축에 관하여 웃쪽부분만 생각하므로 그림 3−9에서와 같을 때는 b의 값범위는 다음과 같다.

$b\in(-3,\ 3\sqrt{2})$ ($y>0$ 이므로 x=−3은 제외한다.)

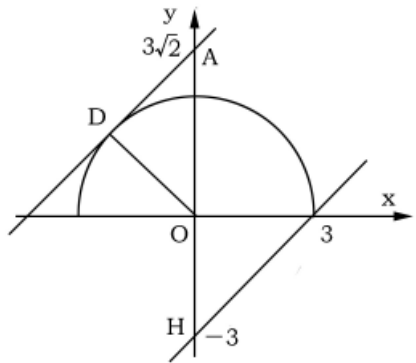



그림 3−9

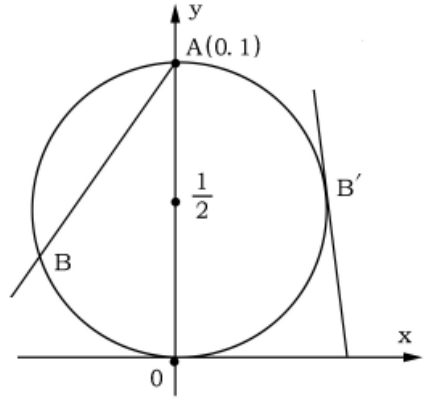
[례4] 두 곡선 $C_1: x^2+y^2-y=0,\ \ C_2: ax^2+bxy\ +x=0$ 이 3개의 공통점만을 가지자면 a, b 는 어떤 조건을 만족시켜야 하는가?(그림 3−10)

(설명) **첫째 방법:**

$$C_1: x^2+(y-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2,$$

$C_2: x(ax+by+1)=0$ 이므로

그림 3−10

C_1 은 중심이 $(0,\ \frac{1}{2})$ 이고 반경이 $\frac{1}{2}$ 인 원둘레이며 C_2 는 두 직선 $x=0$ 및 $ax+by+1=0$ 을 나타낸다.

직선 $x=0$ 과 원둘레는 두개의 점 $O(0,\ 0),\ \ A(0,\ 1)$ 에서 사귄다.

$a=0$ 일 때 직선의 방정식 $by+1=0$ 은 조건을 만족시키지 않는다.

$a\neq 0$ 일 때

(1) 직선은 점 $A(0, 1)$ 을 지나며 원과 사귀므로 조건에 맞는다.

이때 점 A가 직선우에 놓이면 $0\cdot a+1\cdot b+1=0$ 으로부터 $b=-1$

(2) $b\neq -1$ 일 때 문제의 요구를 만족시키자면 직선과 원은 서로 접하여야 한다.

$$\begin{cases} ax+by+1=0 \\ x^2+y^2-y=0 \end{cases} \Rightarrow\ (a^2+b^2)y^2+(2b-a^2)y+1=0$$

$$D=(2b-a^2)^2-4(a^2+b^2)=0\ \Rightarrow\ a^2-4b-4=0$$

그러므로 $a,\ \ b$ 가 만족하는 조건은 $a\neq 0$ 일 때

$b=-1,\ \ a\neq 0,\ \ b\neq -1$ 일 때 $a^2-4b-4=0$

둘째 방법: (1) 직선 $ax+by+1=0$ 이 점 A(0, 1)이므로

$$0\cdot a+1\cdot b+1=0 \qquad 즉 \quad b=-1$$

이때 직선의 방정식은 $ax-y+1=0$ 이다.

만일 직선과 원둘레가 사귀면 원의 중심으로부터 직선까지의 거리는 반경보다 작다.

즉 $\dfrac{\left|-\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{a^2+1}}<\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a^2>0 \qquad \therefore a\neq 0$

$\therefore \quad a\neq 0$ 일 때 $\quad b=-1$

(2) $a\neq 0$ 일 때 $b\neq -1$ 이면 직선은 점 A를 지나지 않으며 이때 직선은 반드시 원과 접한다.

이때 원의 중심으로부터 직선까지의 거리는 반경과 같다.

즉 $\dfrac{\left|-\frac{1}{2}b+1\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{1}{2}$

$$\left|\frac{1}{2}b+1\right|^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2) \quad \Rightarrow \quad a^2-4b-4=0$$

$\therefore \quad a\neq 0, \quad b\neq -1$ 일 때 $a^2-4b-4=0$

원의 대칭이동과 평행이동에 관한 문제

[례1] 원 $C:(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 를 점 P(−1, 1)에 관하여 대칭이동한 원둘레의 방정식을 구하여라.

(설명) **첫째 방법:** 원 C에서 중심 C(2, −1)의 점 P(−1, 1)에 관한 대칭점은 (−4, 3)이다.

따라서 대칭이동한 원의 중심은 (−4, 3)이다.

구하려는 원둘레의 방정식은 $(x+4)^2+(y-3)^2=4$ 이다.

둘째 방법: 원둘레 C의 임의의 점의 자리표를 (x_0, y_0), 이 점의 점 P에 관한 대칭점을 (x', y') 라고 하면 가운데점의 자리표를 구하는 공식으로부터

$$\begin{cases} x'=-2-x_0 \\ y'=2-y_0 \end{cases} \qquad \text{즉} \qquad \begin{cases} x_0=-x'-2 \\ y_0=-y'+2 \end{cases}$$

(x_0, y_0) 이 원둘레 C에 놓이므로 $(-x'-2-2)^2+(-y'+2+1)^2=4$

즉 $(x+4)^2+(y-3)^2=4$ 는 구하려는 방정식이다.

[례2] 원둘레 $C: x^2+y^2=1$을 평행이동하여 어느 위치에 가져갈 때 그것과 원둘레 $(x-3)^2+y^2=16$과 직교하며 Y축에 접하겠는가를 구하여라.

(설명) 원둘레 C를 평행이동한것이 Y축에 접하므로 옮겨간 원에서 중심의 가로자리표의 절대값은 1과 같다.

즉 그 원의 중심을 $C'(x_0, y_0)$이라고 하면 $|x_0|=1$이다.

이 원둘레의 방정식을

$(x\pm1)^2+(y-y_0)^2=1$ 로 놓자.

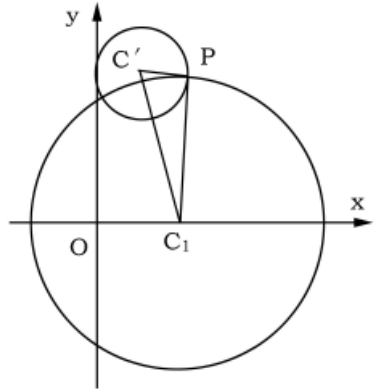
그림 3－11에서 보는바와 같이

$C'C_1^2=C'P^2+C_1P^2$이므로

$(3\pm1)^2+(0-y_0)^2=1+4^2$

$\therefore\ y_0=\pm1$ 또는 $y_0=\pm\sqrt{13}$

그림 3－11

즉 원의 중심이 $(1, \sqrt{13})$ 또는 $(1, -\sqrt{13})$ 또는 (－1, 1) 또는 (－1, －1)로 가게 평행이동하면 된다.

원과 관련한 최대값, 최소값문제

[례1] 원둘레 $C: (x-3)^2+(y-2)^2=2$ 우에서 한 점 P를 구하되 두 점 A(－2, 1), B(2, －3)으로부터의 거리의 두제곱의 합이 최소로 되게 하여라. (그림 3－12)

(설명) M이 AB의 가운데점이라고 하면 PM은 △APB의 가운데점이므로

$AP^2+BP^2=2PM^2+2AM^2$

$AM^2=8$이므로 PM이 최소일 때

AP^2+BP^2이 최소로 된다.

M(0, －1)이므로 직선 MC의 방정식은 $y=x-1$

점으로부터 원까지의 최소거리는 MC와 원과의 사귐점까지의 거리이다.

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-2)^2=2\\ y=x-1\end{cases} \Rightarrow$$

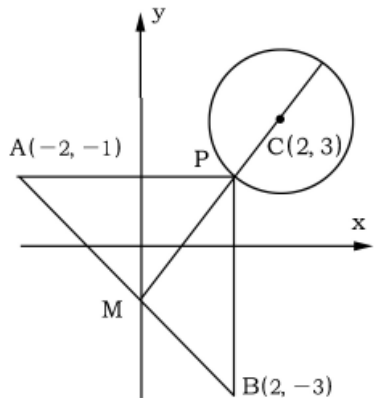



그림 3－12

$\Rightarrow \quad x^2-6x+8=0$

$\therefore \quad x=2$ 또는 $x=4$

문제의 의미로부터

$x=2, \quad y=1$

$\therefore \quad P(2, \ 1)$

[례2] 원둘레 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$, 직선 $\ell: y-x-1=0$이 있다. 원둘레의 점으로부터 직선까지의 최대거리, 최소거리를 구하여라.

(설명) **첫째 방법:** 중심 C(1, −2)로부터 직선 ℓ까지의 거리는

$$d=\frac{|1+2+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

원의 반경이 2이므로 최대거리는 $2\sqrt{2}+2$, 최소거리는 $2\sqrt{2}-2$이다.

둘째 방법: ℓ에 평행이고 원에 접하는 직선의 방정식을

$\ell_1: y-x+m=0$으로 놓자.

$$\begin{cases} y-x+m=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x^2+(2-2m)x+m^2-4m+1=0$$

서로 접하므로 $D=(1-m)^2-2(m^2-4m+1)=0, \qquad m=3\pm 2\sqrt{2}$

따라서 접선의 방정식은

$$d=\frac{\left|3\pm 2\sqrt{2}\right|+1}{\sqrt{2}}$$

즉 $d_1=2\sqrt{2}+2, \quad d_2=2\sqrt{2}-2$

직선 ℓ과 원의 최대거리는 $2\sqrt{2}+2$, 최소거리는 $2\sqrt{2}-2$이다.

기타문제

[례1] 반경이 4인 같은 두 원둘레 O_1과 O_2이 A(2, 1)과 B(−2, −2)에서 사귄다. 그것들의 중심들을 지나는 직선의 변화률과 중심사이의 거리를 구하여라.

(설명) 직선 AB 의 변화률은 $K_1=\dfrac{1+2}{2+2}=\dfrac{3}{4}$이고 직선 O_1, O_2은 공통활줄 AB에 수직이므로 직선 O_1O_2의 변화률은 $K_2=-\dfrac{4}{3}$이다.

직선 O_1O_2와 AB의 사귐점을 N이라고 하면 N은 AB의 가운데점으로 된다.

$\therefore\quad N(0,\ -\frac{1}{2})$이고 $\quad NA=\frac{5}{2}$

O_1, N, A는 직3각형을 이루므로

$$O_1N=\sqrt{O_1A^2-AN^2}=\sqrt{4^2-(\frac{5}{2})^2}=\frac{\sqrt{39}}{2}$$

$\therefore\ O_1O_2=2O_1N=\sqrt{39}$

[례2] 원 O 의 한 활줄의 두 끝점 A, B에서 이 원에 접선을 그었다. 이때 원둘레의 임의의 한 점 Q에서 활줄까지의 거리는 점 Q에서 두 접선까지의 거리들의 비례가운데마디와 같다는것을 증명하여라.

그림 3-13

(설명) 그림 3-13에서와 같이 자리표계를 설정하자.

원둘레방정식을 $x^2+y^2=R^2$, 점

A의 자리표를 $(x_0,\ y_0)$이라고 하면 B$(x_0,\ -y_0)$이고 활줄 AB의 방정식은 $x=x_0$이다.

두 접선의 사귐점을 P라고 하면 P는 x축우에 있다.

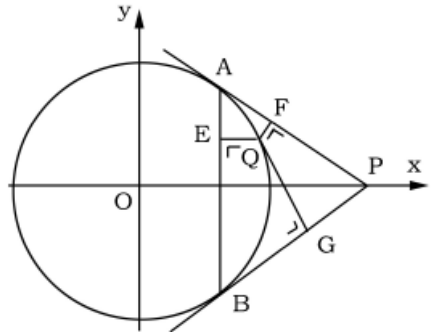
접선 AP, BP의 방정식은 각각 $x_0x+y_0y=R^2$, $x_0x-y_0y=R^2$

원둘레우의 임의의 점을 Q$(x_1,\ y_1)$라고 하면 점 Q로부터 AB 까지의 거리는 $QE=\left|x_1-x_0\right|$

AP, BP까지의 거리는 각각

$$QF=\frac{\left|x_0x_1+y_0y_1-R^2\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\quad QG=\frac{\left|x_0x_1-y_0y_1-R^2\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$$

$$\therefore QF\cdot QG=\frac{\left|(x_0x_1-R^2)^2-{y_0}^2{y_1}^2\right|}{x_0^2+y_0^2}=$$

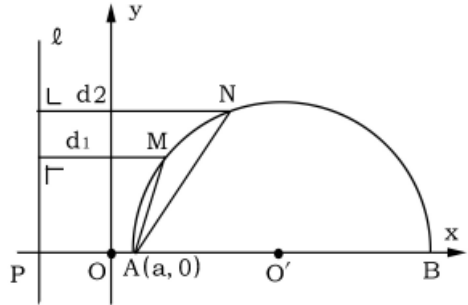
$$=\frac{\left|(x_0x_1-R^2)^2-(R^2-x_1^2)(R^2-x_0^2)\right|}{x_0^2+y_0^2}=$$

$$=\frac{R^2(x_0-x_1)^2}{R^2}=(x_0-x_1)^2=QE^2$$

［례3］ 반원의 직경은 AB＝2R이고 반원밖의 직선 ℓ과 BA의 연장선이 점 P에서 수직으로 사귄다. 이때 AP＝2a $(2a<\frac{R}{2})$ 반원둘레우의 두 점 M, N에서 ℓ까지의 거리를 각각 d_1, d_2라고 할 때 $d_1=AM,\ d_2=AN$이다.

AM＋AN＝2R임을 증명하여라.

그림 3－14

（설명） AB가 x축우에 AP의 가운데점이 원점 O로 되게 자리표계를 정하자. (그림 3－14)

그러면 $A(a,\ 0)$이고 원의 중심은 $O'(a+R,\ 0)$, $B(a+2R,\ 0)$

ℓ의 방정식은 $x=-a$이다.

점 M, N은 점 A를 모임점, ℓ을 준선으로 하는 포물선 $y^2=4ax\ (y>0)$우에 있으므로 원둘레의 방정식은 $(x-a-R)^2+y^2=R^2\ \ (y>0)$

$$\therefore\quad \begin{cases} y^2=4ax \\ (x-a-R)^2+y^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2(a+R)x+4ax+(R+a)^2=R^2$$

$M(x_1,\ y_1)$, $N(x_2,\ y_2)$은 서로 다른 두 점이므로 D＞0

즉 $R(R-4a)>0$

또한 $x_1+x_2=2(R-a)$이므로

$$AM+AN=(x_1+a)+(x_2+a)=x_1+x_2+2a=2R$$

련습문제

1. 원의 중심이 (2, －3)이고 직경의 두 끝점이 자리표축에 있는 원둘레의 방정식은 (　)이다.

① $x^2+y^2-4x+6y+8=0$　② $x^2+y^2-4x+6y-8=0$

③ $x^2+y^2-4x-6y=0$　④ $x^2+y^2-4x+6y=0$

2. 직선 $y=k+1$과 원둘레 $x^2+y^2=\sqrt{2}$의 자리관계는 ( )이다.

① 밖에서 떨어져있다. ② 서로 접한다.

③ 서로 사귄다. ④ k의 값에 따라 결정된다.

3. 직선 $y=|x|$과 원둘레 $x^2+y^2=4$로 둘러막힌 제일 작은 부분의 면적은 ( ) 이다.

① π ② 2π ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ π 또는 $\frac{\pi}{2}$

4. $y=-\sqrt{1-x^2}$이 나타내는 도형은 ( ) 이다.

① 원둘레 ② 웃반원둘레 ③ 아래반원둘레

④ 웃반원둘레 또는 아래반원둘레

5. 두 원둘레 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$, $x^2+y^2-8x-2y+13=0$의 자리관계는 ( ) 이다.

① 서로 사귄다. ② 서로 접한다.

③ 아낙에서 떨어져있다. ④ 밖에서 떨어져있다.

6. 원둘레 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$이 x축과 원점에서 접하면 ( )이다.

① $F=0,\quad D\cdot E\neq 0$ ② $D=E=0,\quad F\neq 0$

③ $E=F=0,\quad D\neq 0$ ④ $D=F=0,\quad E\neq 0$

7. P$(x,\ y)$가 원둘레 $x^2+y^2-2x+4y=0$이면 $x-2y$의 최대값은 ( )이다.

① $\sqrt{5}$ ② 10 ③ 9 ④ $5+2\sqrt{5}$

8. A=C, B=0은 방정식 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$이 원둘레를 나타내기 위한것은 ( )이다.

① 충분조건이나 필요조건은 아니다.

② 필요조건이나 충분조건은 아니다.

③ 필요충분조건이다.

④ 필요조건도 충분조건도 아니다.

9. 원둘레 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ 을 직선 $x+y-1=0$ 에 관하여 대칭이동하여 얻은 원둘레의 방정식은 ( )이다.

① $(x-3)^2+y^2=16$　　② $x^2+(y-3)^2=16$

③ $(x-1)^2+(y-3)^2=16$　　④ $(x-3)^2+(y-1)^2=16$

10. 모임 M$=\{(x,\ y)\ |x^2+y^2=4\}$, $N=\{(x,\ y)\ |y=2x+b\}$에 대하여 $M\cap N\neq\varnothing$ 이면 b의 값범위는 ( )이다.

① 0＜b＜$2\sqrt{5}$　　② $-2\sqrt{5}<b<0$

③ $-2\sqrt{5}<b<2\sqrt{5}$　　④ $-2\sqrt{5}\le b\le 2\sqrt{5}$

11. 원둘레의 방정식이 $4x^2+4y^2-12x-16y+9=0$ 이면 원의 중심은 ______, 반경은 ________이다.

12. 두 직선 $y=x+2a$ 와 $y=2x+a+1$ 의 사귐점이 원둘레 $x^2+y^2=4$ 의 내부에 있다. 그러면 a 의 값범위는 ______이다.

13. 방정식 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 이 나타내는 도형의 아낙부분의 면적은 ______이다.

14. 두 원둘레 $x^2+y^2-10x-10y=0$ 과 $x^2+y^2+6x+2y-4=0$ 이 서로 사귄다. 이때 공통활줄이 놓이는 직선의 방정식은 ______이고 공통활줄의 길이는 ____이다.

15. 원둘레 $x^2+y^2-6x=0$ 에 외접하고 y축에 접하는 원의 중심의 자리길방정식은 ______이다.

16. 원둘레 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 우의 한 점 P 및 원밖의 한 점 Q(－1, 0)에 대하여 PQ의 최소값은 _____이고 최대값은 ______이다.

17. 원둘레 $x^2+y^2+2x=0$ 과 직선 $2x-y+m=0$ 이 사귈 때

$m\in$____, 접할 때 $m\in$____, 서로 떨어져있을 때 $m\in$_____ 이다.

18. 두 원둘레 $C_1: x^2+y^2+2x=8$, $C_2: x^2+y^2-4x-6y=0$의 공통활줄이 놓이는 직선의 방정식은 ______이고 C_2의 중심으로부터 원 C_1에 그은 접선의 길이는 _______이다.

19. 두 원둘레 $C_1: x^2+y^2-4x-4=8$과 $x^2+y^2+6x+10y=16=0$의 자리관계는 ____이다.

20. 평면에 한 점 P와 P를 지나지 않으며 서로 수직인 직선 m, n이 있다. 점 P를 지나며 m, n에 모두 접하는 원의 개수는 _____이다.

21. △ABC에서 A(0, 0), B(8, 0), C(7, 6)일 때 △ABC의 외접원둘레의 방정식을 구하여라.

22. 반경 $4\sqrt{2}$이고 직선 $x+y=0$, $x-y=0$에 모두 접하는 원둘레의 방정식을 구하여라.

23. 중심이 직선 $y=-2x$에 있고 직선 $x+y=1$과 점 (2, −1) 에서 접하는 원둘레의 방정식을 구하여라.

24. 원둘레 $x^2+y^2=1$과 $x^2+y^2+2x=0$이 있다.

1) 점 A(3, 2)와 두 원둘레의 사귐점을 지나는 원둘레의 방정식을 구하여라.

2) 두 원의 사귐점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

25. 두 원둘레 $C_1: x^2+y^2-6x+4y+4=0$과
$C_2: x^2+y^2-12x-4y-9=0$의 공통접선의 길이를 구하여라.

26. 반경이 R=5이고 직선 $4x+3y-70=0$과 점 (10, 10)에서 접하는 원둘레의 방정식을 구하여라.

27. 평면우에 두 점 A(−1, 0), B(1, 0)이 있다. 원둘레 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 우에서 한 점 P를 구하되 AP^2+BP^2 이 최소로 되게 하여라.

28. P(4, 3)으로부터 원둘레 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

29. 두 원둘레 $C_1:x^2+y^2-6y=0$ 과 $C_2:(x-2\sqrt{3})^2+(y-1)=1$ 이 주어졌다.

1) 두 원은 외접하며 x축은 하나의 공통접선임을 증명하여라

2) 접점사이의 두 활등과 x축에 의하여 둘러막힌 도형의 면적을 구하여라.

30. 직선 $x-y-5=0$ 과 원둘레 $(x-2\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$ 의 가장 먼 거리, 가장 가까운 거리를 구하여라. 그리고 원둘레우에서 직선으로부터 가장 가까운 점, 가장 먼점의 자리표를 구하여라.

31. 원둘레의 방정식 $x^2+y^2=R^2$ 과 직선의 방정식 $y=-3x+m$ (m 은 보조변수)이 주어졌다.

1) m 이 어떤 값을 취할 때 직선과 원둘레가 공통점을 가지겠는가?

2) m 의 값에 관계없이 직선과 원둘레가 두개의 공통점 A, B를 가지고 OA, OB의 경사각이 α, β 일 때 $\sin(\alpha+\beta)$ 는 일정한 값을 가진다는것을 증명하여라.

32. 자리표평면우의 원둘레 $x^2+y^2-6x-4y+10=0$ 과 직선 $\ell:y=mx$ 에 대하여

1) 원둘레와 직선이 서로 다른 두 점에서 사귈 때 이 취하는 값범위를 구하여라.

2) 직선과 원둘레와의 두 사귐점을 맺는 선분의 가운데점을 P라고 할 때 점 P의 자리길방정식을 구하여라.

3) 직선 ℓ 과 다른 한 직선 $3x+2y+4=0$ 과의 사귐점을 Q라고 할 때 OP · OQ의 값을 구하여라.

답

1. ④ 2. ③ 3. ⑤ 4. ③ 5. ④ 6. ④
7. ② 8. ② 9. ① 10. ④

11. 원의 중심 $(\frac{2}{3},\ 2)$, 반경 2 12. $a \in (-\frac{1}{5},\ 1)$

13. $2+\pi$ 14. $4x+3y-1=0,\quad \frac{2}{5}\sqrt{94}$

15. $y^2=12x,\quad y=0\ (x<0)$

16. $PQ_{최소}=4\sqrt{2}-2,\qquad PQ_{최대}=4\sqrt{2}+2$

17. $m \in \left(2-\sqrt{5},\ 2+\sqrt{5}\right)$일 때 사귄다.

$m=2-\sqrt{5},\ m=2+\sqrt{5}$일 때 서로 접한다.

$m \in \left(-\infty,\ 2-\sqrt{5}\right) \cup \left(2+\sqrt{5},\ +\infty\right)$일 때 서로 떨어져있다.

18. $3x+3y-4=0,\ 3$ 19. 서로 접한다. (외접)

20. 2개

21. $x^2+y^2-8x-\frac{29}{6}y=0$

(지시): 원둘레의 방정식을 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 으로 한다.

22. $(x\pm 8)^2+y^2=32$ 또는 $x^2+(y\pm 8)^2=32$

(지시): 원의 중심을 $(x_0,\ 0)$ 또는 $(0,\ y_0)$로 놓으면

$4\sqrt{2}=\frac{|x_0|}{\sqrt{2}}$ 로부터 $x_0=\pm 8$

마찬가지로 $y_0=\pm 8$

23. $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

(지시): 원둘레의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 로 놓으면

$b=-2a,\quad (2-a)^2+(-1-b)^2=R^2,\quad \frac{|a+b-1|}{\sqrt{2}}=R^2$ 으로부터

$a=1,\quad b=-2,\quad R=\sqrt{2}$

24. 1) $7x^2+7y^2-24x-19=0$ 2) $2x+1=0$

25. 3

26. $(x-6)^2+(y-7)^2=25$ 또는 $(x-14)^2+(y-13)^2=25$

27. $P(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$

28. $3x-4y=0$ 또는 $x=4$

(지시): 점 P를 지나는 직선의 방정식을 $y-3=k(x-4)$로 놓자.

$$\begin{cases} y-3=k(x-4) \\ (x-2)^2+(y+1)^2=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+k^2)x^2+(8k-8k^2-4)x+16k^2-32k+16=0$$

직선과 원이 접하므로

$$D=(2k-2k^2-1)^2-4(1+k^2)(k^2-2k+1)=0, \quad k=\frac{3}{4}$$

따라서 접선의 방정식은 $y-3=\frac{3}{4}(x-4)$

즉 $3x-4y=0$

다른 한 접선의 변화률은 존재하지 않는다.

즉 $x=4$

29. 1) (그림 3-15) $C_1 : x^2+(y-3)^2=9$의 중심은 $C_1(0, 3)$ 반경은 $R_1=3$이다. C_2의 중심은 $C_2(2\sqrt{3}, 1)$, 반경은 $R_2=1$이다.

$C_1C_2=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(1-3)^2}=$

$=4=R_1+R_2$이므로 두 원은 외접한다.

그리고 C_1, C_2로부터 x축까지의 거리는 각각 그의 반경과 같다.

따라서 x축에 접한다.

즉 x축은 공통외접선이다.

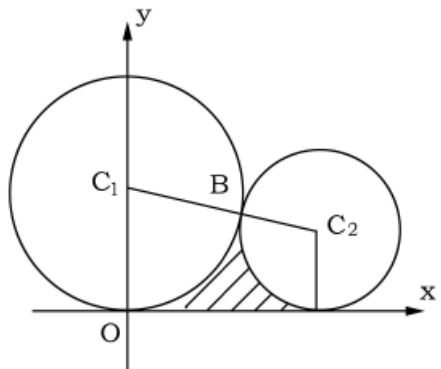



그림 3-15

2) 직선 C_1, C_2의 변화률이 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이면

$$\angle OC_1C_2=\frac{\pi}{3},\quad \angle C_1C_2A=\frac{3}{2}\pi$$

부채형 C_1OB의 면적＝ $\frac{1}{6}\pi 3^2=\frac{3}{2}\pi$

부채형 C_2AB의 면적＝$\frac{1}{3}\pi r^2=\frac{\pi}{3}$,

제형 OC_1C_2A의 면적은＝$\frac{1}{2}(3+1)2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

즉 구하려는 도형의 면적은

$$4\sqrt{3}-\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi$$

30. 그림 3－16에서와 같이 중심 C를 지나 직선 $x-y-5=0$에 수직선을 긋고 원둘레와 사귀는 점을 A, B라고 하면 AD는 가장 먼거리이고 BD는 가장 가까운 거리이다. 그리고 A, B는 각각 직선으로부터 가장 먼 거리, 가장 가까운 거리에 있는 원둘레의 점이다.

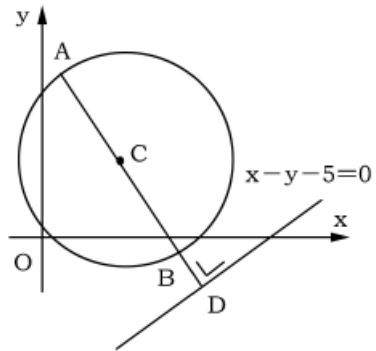
그림 3—16

점 C를 지나며 ℓ에 수직인 직선의 방정식은

$y=-x+\sqrt{3}+1$이므로

$$\begin{cases}(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4\\ y=-X+\sqrt{3}+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}+\sqrt{2}\\ y=1-\sqrt{2}\end{cases}\quad \text{또는}\quad \begin{cases}x=\sqrt{3}-\sqrt{2}\\ y=1+\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\therefore\ A(\sqrt{3}-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}),\quad B(\sqrt{3}+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$$

$$AD=\frac{\left|\sqrt{3}-2\sqrt{2}-6\right|}{\sqrt{2}},\quad BD=\frac{\left|\sqrt{3}+2\sqrt{2}-6\right|}{\sqrt{2}}$$

31. (그림 3-17)

1) $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ y=-3x+m \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x^2-6mx+m^2-R^2=0$

직선과 원둘레가 공통점을 가지므로 $D \geq 0$ 이다.

이로부터 $m \in \left[-\sqrt{10}R,\ \sqrt{10}R\right]$ 이다.

그림 3-17

2) 직선과 원둘레가 공통점을 가질 때 A(Rcosα, Rsinα), B(Rcosβ, sinβ)로 놓으면

$$\begin{cases} x_1=R\cos\alpha \\ y_1=R\sin\alpha \end{cases},\quad \begin{cases} x_2=R\cos\beta \\ y_2=R\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{x_1}{R} \\ \sin\alpha=\dfrac{y_1}{R} \end{cases},\quad \begin{cases} \cos\beta=\dfrac{x_2}{R} \\ \sin\beta=\dfrac{y_2}{R} \end{cases}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{y_1}{R}\cdot\frac{x_2}{R}+\frac{x_1}{R}\cdot\frac{y_2}{R}=$$

$$=\frac{1}{R^2}(x_2y_1+x_1y_2)$$

A, B는 $y=-3x+m$ 에 놓이므로 $y_1-3x_1+m,\quad y_2=-3x_2+m$

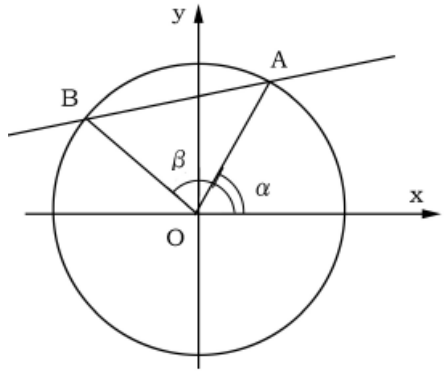
$$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{R^2}\left[(-3x_1+m)x_2+x_1(-3x_2+m)\right]=$$

$$=\frac{1}{R^2}\left[-6x_1x_2+m(x_1+x_2)\right]$$

$10x^2-6mx+m^2-R^2=0$ 이므로 $x_1+x_2=\dfrac{3}{5}m,\quad x_1x_2=\dfrac{m^2-R^2}{10}$

이것을 웃식에 갈아넣으면

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{R^2}\left(-6\frac{m^2-R^2}{10}+m\frac{3}{5}m\right)=\frac{3}{5}$$

따라서 $\sin(\alpha+\beta)$는 일정하다.

32. 1) $\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y+10=0 \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (m^2+1)x^2-2(2m+3)x+10=0$$

직선과 원둘레는 서로 다른 두 점에서 사귀므로 D>0 이다.

즉 $(2m+3)^2-10(m^2+1)>0$

$$\therefore m\in\left(1-\frac{\sqrt{30}}{6},\ 1+\frac{\sqrt{30}}{6}\right)$$

2) 방정식 $(m^2+1)x^2-2(2m+3)x+10=0$ 으로부터 직선과 원둘레의 사귐점을 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 로 놓으면

$$x_1+x_2=\frac{2(2m+3)}{m^2+1},\quad x_1\cdot x_2=\frac{10}{m^2+1}$$

활줄 AB의 가운데점을 P(x, y)라고 하면

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2m+3}{m^2+1} \\ y=mx=\dfrac{m(2m+3)}{m^2+1}- \end{cases},\quad m\in(1-\frac{\sqrt{30}}{6},\ 1+\frac{\sqrt{30}}{6})$$

여기서 보조변수 m 를 소거하면 $x^2+y^2-3x-2y=0$ 을 얻는다.

3) P, Q는 모두 직선 $y=mx$ 에 놓이므로

P$(x_1,\ mx_1)$, $Q(x_2,\ mx_2)$ 로 놓으면 $x_p=\dfrac{2m+3}{m^2+1}$ 이므로

$x_1=\dfrac{2m+3}{m^2+1}$ 이다.

$\begin{cases} y=mx \\ 3x+2y+4=0 \end{cases}$ 으로부터 $x_2=\dfrac{-4}{2m+3}$

$$\therefore OP\cdot OQ=\sqrt{(m^2+1)^2(x_1x_2)^2}=4$$

2. 원뿔곡선의 방정식

1) 타원

① 타원의 정의

평면에서 정해놓은 두 점 F_1, F까지의 거리의 합이 일정($2a$) 한 점들의 모임으로 된 도형을 타원이라고 한다. 이때 F_1, F를 타원의 모임점이라고 부른다.

② 타원의 표준방정식

타원의 중심이 자리표원점에 있고 모임점 F_1, F가 축우에 있을 때 $F_1(-c,\ 0)$, $F(c,\ 0)$으로 놓자. (그림 3-18)

타원우의 임의의 점을 $M(x,\ y)$라고 할 때 $MF_1 + MF = 2a$로부터 다음의 방정식을 얻는다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (b^2 = a^2 - c^2)$$

이것을 타원의 표준방정식이라고 한다.

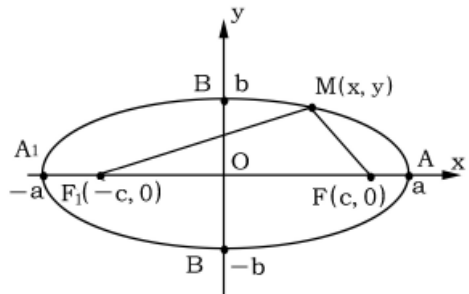
여기서 a를 타원의 긴 반경, b를 타원의 짧은 반경이라고 부른다.

그림 3-18에서 $AA_1 = 2a$인데 이것들을 각각 타원의 긴축, 짧은축이라고 부른다.

※ 타원의 표준방정식에서 x^2의 분모가 y^2의 분모보다 더 크면 모임점은 x축에 있고 y^2의 분모가 더 크면 모임점은 y축에 있다.

실례로 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$의 모임점은 y축우에 있다.

그림 3-18

※ 모임점으로부터 타원우의 점 $M(x, y)$까지의 거리를 점 M의 모임점반경이라고 부르는데 특히

$F_1M = r_1$를 왼쪽모임점반경, $FM = r$를 오른쪽모임점반경이라고 부른다.

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r = a - \frac{c}{a}x$$

③ 타원의 리심률

$e = \frac{c}{a}$는 타원의 리심률이라고 부른다. 리심률 e는 타원의 모양을 결정해주는 결수이다. ($a > c$이므로 $0 < e < 1$이다.)

타원의 리심률을 긴 반경 a와 짧은 반경 b에 의하여 표시하면

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}$$

짧은 반경 b를 리심률과 긴 반경에 의하여 표시하면

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2}$$

타원의 모임점반경들은 $r_1 = a + ex, \quad r = a - ex$

④ 타원의 준선(그림 3－19)

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$의 리심률을 e라고 할 때 두 직선 $x = \pm\frac{a}{e}$를 주어진 타원의 준선이라고 부른다. (또는 $x = \pm\frac{a^2}{c}$)

특히 $x = -\frac{a}{e}$를 모임점 $F_1(-c,\ 0)$에 대응하는 준선(또는 왼쪽준선) $x = \frac{a}{e}$를 모임점 $F(c,\ 0)$에 대응하는 준선 (또는 오른쪽준선)이라고 부른다.

타원우의 임의의 점에서 모임점까지의 거리와 그 모임점에 대응하는 준선까지의 거리의 비는 일정하며 그 비는 타원의 리심률 e와 같다.

즉 그림 3−19에서 $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r}{d} = e$

⑤ 모임점을 지나며 긴축에 수직인 타원의 활줄의 길이(그림 3−20)

$$HH_1 = \frac{2b^2}{a}$$

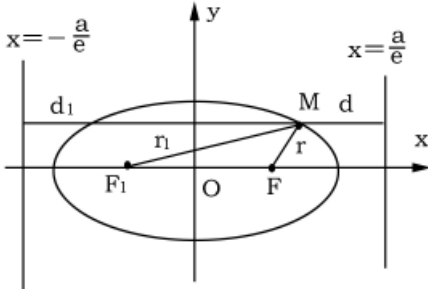



그림 3−19

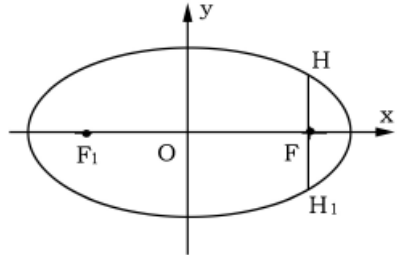



그림 3−20

2) 쌍곡선

① 쌍곡선의 정의

평면에서 정해놓은 두 점 F_1, F까지의 거리의 차의 절대값이 일정한 ($2a>0$) 점들로 이루어지는 도형을 쌍곡선이라고 부른다. 여기서 점 F_1, F를 쌍곡선의 모임점이라고 부른다.

② 쌍곡선의 표준방정식

쌍곡선의 중심이 자리표원점에 있고 모임점 F_1, F가 x축우에 있을 때 $F_1(-c,\ 0)$, $F(c,\ 0)$으로 놓자.

쌍곡선우의 임의의 점을 $M(x,\ y)$라고 할 때 $\left|MF_1 - MF\right| = 2a$로부터 다음의 방정식을 얻는다.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (b^2 = c^2 - a^2)$$

이것을 쌍곡선의 표준방정식이라고 부른다.

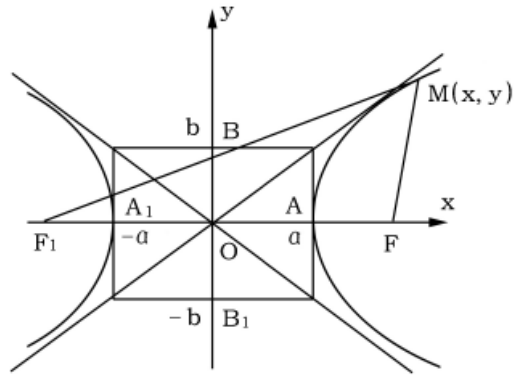
여기서 a를 쌍곡선의 실반경, b를 허반경이라고 부른다.

그림 3−21에서 $AA_1 = 2a$, $BB_1 = 2b$이다. 이것들을 각각 타원의 실축, 허축이라고 부른다.

※ 실반경이 a, 허반경이 b이고 모임점이 y축에 있는 쌍곡선의 표

준방정식은 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 이다.

그림 3-21

※ 쌍곡선의 모임점으로부터 쌍곡선우의 점 $M(x,\ y)$ 까지의 거리들을 점 M 의 모임점반경이라고 부르며 $r_1=MF_1$ 을 왼쪽모임점반경, $r=MF$ 를 오른쪽모임점반경이라고 부른다.

$$r_1=MF_1=\pm(\frac{c}{a}x+a),$$

$$r=\pm(\frac{c}{a}x-a)$$

($x\geq a$ 일 때 《+》, $x\leq -a$ 일 때 《−》)

③ 쌍곡선의 리심률

$e=\frac{c}{a}$ 를 쌍곡선의 리심률이라고 부른다. ($c>a$ 이므로 $e>1$ 이다.)

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}$$

$b=\sqrt{c^2-a^2}=a\sqrt{e^2-1}$ $\quad r_1=\pm(ex+a),\ \ r\pm(ex-a)$

④ 쌍곡선의 준선

쌍곡선 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 의 리심률을 e 라고 할 때 두 직선 $x=\pm\frac{a}{e}$ (또는 $x=\pm\frac{a^2}{c}$)를 쌍곡선의 준선이라고 부른다.

특히 $x=-\frac{a}{e}$ 를 모임점 $F_1(-c,\ 0)$ 에 대응하는 준선(또는 왼쪽준선), $x=\frac{a}{e}$ 를 모임점 $F(c,\ 0)$ 에 대응하는 준선(또는 오른쪽준선)이

라고 부른다.

쌍곡선우의 임의의 점에서부터 모임점까지의 거리와 그 모임점에 대응하는 준선까지의 비는 일정하며 그 비는 쌍곡선의 리심률 e와 같다. (그림 3－22)

즉 $\frac{r_1}{d_1}=\frac{r}{d}=e$

그림 3－22

⑤ 모임점을 지나며 실축에 수직인 쌍곡선의 활줄의 길이

$$HH_1=\frac{2b^2}{a}$$

⑥ 쌍곡선의 점근선

쌍곡선 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 의 점근선의 방정식은 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$

즉 $y=\pm\frac{b}{a}$이다.

그림 3－23

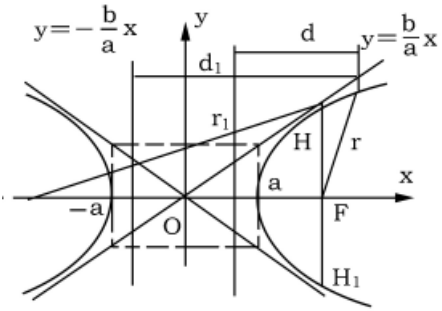
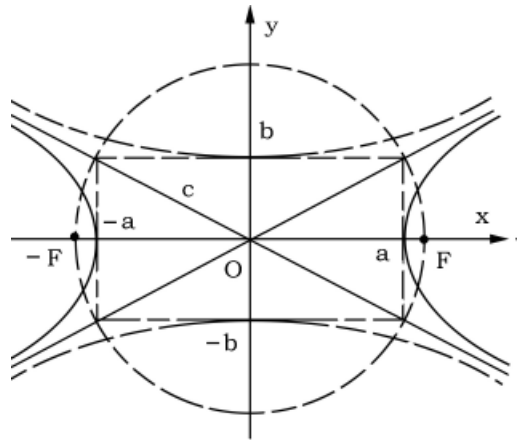
※ 쌍곡선이 주어지면 그의 점근선은 유일하게 결정된다.

점근선이 주어지면 그에 대응하는 쌍곡 선은 무수히 많다.

⑦ 공액쌍곡선

쌍곡선 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 과 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$을 서로 공액인 쌍곡선이라고 부른다. (그림 3－23)

서로 공액인 쌍곡선은 점근선을 공통으로 가진다.

⑧ 등변쌍곡선

실축과 허축이 같은 즉 $a=b$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$을 등변쌍곡선이라고 부른다. 이 쌍곡선의 두 점근선은 서로 수직이다.

3) 포물선

① 포물선의 정의

평면에서 정해놓은 점 F와 정해놓은 직선 ℓ까지의 거리가 같은 점들로 이루어진 도형을 포물선이라고 부른다. 이때 점 F를 포물선의 모임점, 직선 ℓ을 포물선의 준선이라고 부른다.

② 포물선의 표준방정식

포물선의 정점이 자리표 원점에 있고 모임점 F가 x축우에 있을 때 $F(\frac{P}{2},\ 0)$으로 놓자.

포물선우의 임의의 점을 $M(x,\ y)$라고 할 때

다음의 방정식을 얻는다.

$$y^2=2Px$$

이것을 포물선의 방정식이라고 부른다. (그림 3－24)

그림 3－24

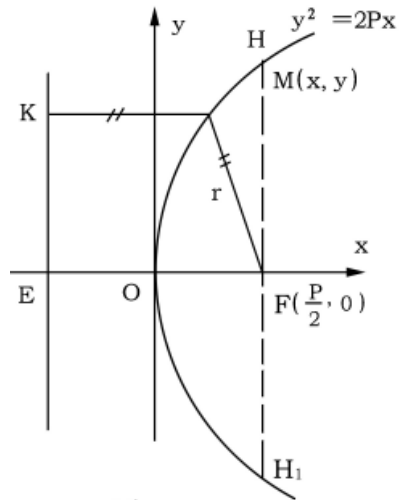
※ 모임점 F로부터 포물선우의 점 $M(x,\ y)$까지의 거리 r를 점 M의 모임점반경이라고 부른다.

$$r=\left|x+\frac{P}{2}\right|$$

③ 포물선의 리심률

$$e=\frac{r}{Mk}=1$$

④ 포물선의 준선

포물선 $y^2=2Px$의 준선의 방정식은 $x=\frac{P}{2}$이다.

⑤ 모임점을 지나며 x축에 수직인 포물선의 활줄의 길이

$$HH_1 = |2P|$$

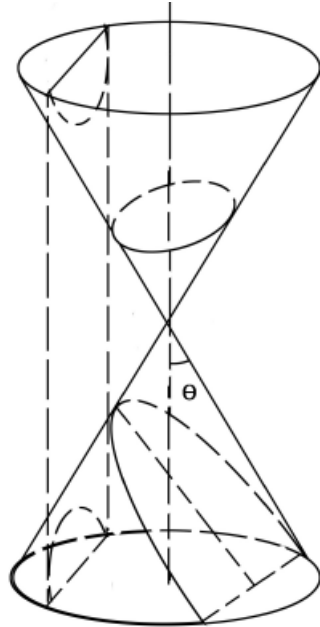
4) 원뿔곡선

그림 3-25

① 원뿔곡선의 정의

앞에서 본 원둘레, 타원, 쌍곡선, 포물선은 원뿔면을 자를 때 생긴다.

② (그림 3-25)

원뿔의 자름면과 원뿔의 축이 이루는 각을 α, 원뿔의 정각을 2θ 라고 할 때 자름면과 원뿔면의 사귐선은

- $\theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 일 때 타원
- $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 일 때 원둘레
- $0 \le \alpha < \theta$ 일 때 쌍곡선
- $\alpha = \theta$ 일 때 포물선

그러므로 원둘레, 타원, 쌍곡선, 포물선을 통털어 원뿔곡선이라고 부른다.

③ 원뿔곡선의 일반방정식

직각자리표계가 도입된 평면에서 y축을 준선, 점 $F(c, 0)$를 모임점으로 하는 원뿔곡선의 일반방정식은 다음과 같다.

$$(1-e^2)x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = 0$$

여기서 e는 곡선의 리심률로서 상수이다.

e가 어떤 값을 잡는가에 따라 방정식은 서로 다른 원뿔곡선을 나타낸다.

ㄱ) $0 < e < 1$일 때 x^2과 y^2의 곁수의 부호는 같으므로 방정식이 나

타내는 곡선은 타원이다.

ㄴ) $e=1$일 때 포물선

ㄷ) $e>1$일 때 쌍곡선

5) 직선과 원뿔곡선의 자리관계

① 직선의 방정식과 원뿔곡선의 방정식으로 이루어진 련립방정식의 풀이의 개수에 따라 자리관계를 판정할수 있다.

ㄱ) 두개의 서로 다른 실수풀이를 가질 때 직선과 원뿔곡선은 서로 사귄다.

ㄴ) 한개의 실수풀이를 가질 때 서로 접한다.

※ 원뿔곡선이 포물선인 경우에는 직선과 한개의 공통점을 가진다고 하며 그 점에서 서로 접한다고 말할수 있다.

ㄷ) 실수풀이를 가지지 않으면 서로 떨어져있다.

② 직선과 쌍곡선이 서로 사귈 때 쌍곡선의 한쪽가지와 사귈수도 있고 두개의 가지와 사귈수도 있는데 판정은 직선의 경사각과 쌍곡선의 점근선의 경사각사이의 관계를 리용하여 할수 있다.

직선의 경사각을 θ, 쌍곡선의 점근선의 경사각을 α라고 할 때

ㄱ) $\theta>\alpha$일 때 직선은 쌍곡선의 한쪽가지 또는 두개의 가지와 사귄다. (사귐점은 두개)

ㄴ) $\theta=\alpha$일 때 직선은 쌍곡선의 한쪽가지와 사귄다. (사귐점은 한개)

ㄷ) $\theta<\alpha$일 때 직선은 쌍곡선의 두개의 가지와 사귄다. (사귐점은 두개)

③ 직선과 원뿔곡선이 서로 접하는 경우

ㄱ) 접선의 존재성을 판정하는 방법

련립방정식을 풀이, 판정하는 대수적방법외에 직선과 원뿔곡선의 기하학적자리관계에 따라 판정하는 방법이 있다.

모임점을 포함하는 일정한 구역이 원뿔곡선의 아낙일 때 타원과 포물선에 대하여 주어진 점이

• 곡선밖에 있는 경우에 두개의 접선이 있다.

• 곡선에 놓이는 경우에 한개의 접선이 있다.

• 곡선안에 있는 경우에는 없다.

쌍곡선에 대하여 주어진 점이

• 곡선안에 또는 원점에 놓이는 경우 접선은 없다.

• 곡선에 또는 점근선에 놓이는 경우 한개의 접선이 있다.

• 곡선밖에 있는 경우 (원점, 점근선에는 놓이지 않는) 두개의 접선이 있다.

ㄴ) 접선을 구하는 방법

어떤 한 점을 지나는 접선의 방정식 구하기

• 만일 점 $P(x_0,y_0)$이 곡선에 놓이면 x^2대신에 xx_0을, y^2대신에 yy_0을, x대신에 $\frac{y+y_0}{2}$을, xy대신에 $\frac{xy_0+x_0y}{2}$을 갈아넣으면 접선의 방정식이 얻어진다.

• 점 $P(x_0,\ y_0)$이 곡선밖에 놓이는 경우에 직선 $y-y_0=k(x-x_0)$과 곡선의 방정식으로 된 련립방정식으로부터 한변수2차방정식을 얻고 $D=0$으로부터 k의 값을 구한다.

이것을 직선의 방정식에 갈아넣으면 접선의 방정식이 얻어진다.

k가 존재하지 않는 경우에는 $x=x_0$이 구하려는 접선의 방정식인가를 알아본다.

• 점 $P(x_0,\ y_0)$이 곡선밖에 있는 경우에 접점을 먼저 구하는 방법으로도 할수 있다. 즉 접점은 $M(x_1,\ y_1)$로 놓고 직선 MP의 방정식과 곡선의 방정식을 련립시켜 $(x_1,\ y_1)$를 구한다.

변화률 k를 가지는 접선의 방정식 구하기

접선의 방정식을 $y=kx+m$으로 놓고 곡선의 방정식과 련립시켜 한변수2차방정식을 얻은 다음 $D=0$으로부터 m을 구한다.

④ 직선과 원뿔곡선사이의 거리

일반적으로 곡선의 점으로부터 직선까지의 거리가 가장 큰것, 가장 작은것이 각각 직선과 곡선사이의 최대거리, 최소거리이다.

6) 원뿔곡선의 표준화

원뿔곡선의 방정식을 평행이동, 회전이동에 의하여 원뿔곡선들의 표준방정식으로 만드는것을 원뿔곡선의 방정식을 표준화한다고

말한다.

① 자리표계의 평행이동 (그림 3－26)

점 P의 처음자리표계에서의 자리표를 $(x,\ y)$, 새 자리표계에서의 자리표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하자.

그림 3－26

처음자리표계 $\{O;\ x,\ y\}$가 평행이동 $\overrightarrow{OO_1}=\{a,\ b\}$에 의하여 새 자리표계 $\{O_1;\ x_1,\ y_1\}$로 옮겨갔다고 할 때 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{cases} x = x_1 + a \\ y = y_1 + b \end{cases}$$

이 식을 평행이동에서의 자리표변환식이라고 부른다.

[례] 타원의 방정식 $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$을 표준화하여라.

(풀이) 타원의 중심이 $O_1(-1,\ 3)$이므로 자리표계를 벡토르 $\overrightarrow{OO_1}=\{-1,\ 3\}$에 의하여 평행이동한다. 새 자리표계에서의 타원의 임의의 점을 $(x_1,\ y_1)$라고 하면

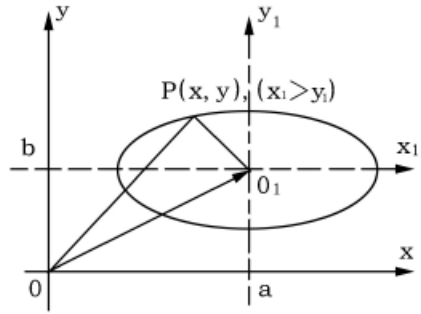
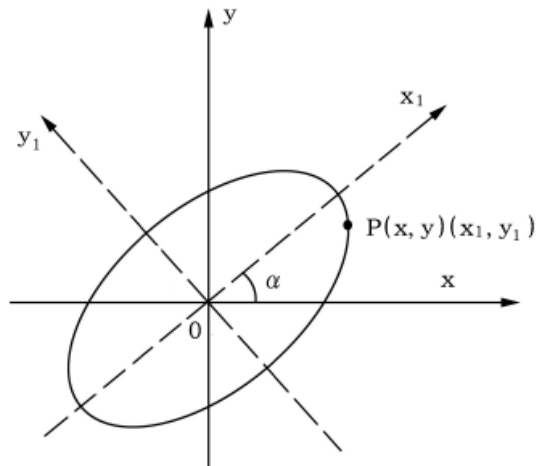
$$\begin{cases} x = x_1 + (-1) \\ y = y_1 + 3 \end{cases}$$

이것을 타원의 방정식에 갈아넣으면

$$\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{9}=1$$

그림 3－27

② 자리표계의 회전이동 (그림3－27)

점 P의 처음자리표계에서의 자리표를 $(x,\ y)$, 새 자리표계에서의 자리표를

$(x_1,\ y_1)$이라고 하자.

처음자리표계 $\{O;\ x,\ y\}$가 회전각 α에 의하여 새 자리표계 $\{O_1;\ x_1,\ y_1\}$로 옮겨갔다고 할 때 다음의 관계가 성립한다.

$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha$

$y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha$

이 식을 회전이동에서의 자리표변환식이라고 부른다.

회전각 α는 다음과 같이 결정한다.

원뿔곡선의 방정식 $Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$에서

- $A = C$일 때 $\cos 2\alpha = 0$ $(\alpha = \frac{\pi}{4})$
- $A \neq C$일 때 $\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$로 정한다. $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

7) 문제풀이의 묘리

원뿔곡선의 방정식구하기문제

[례1] 쌍곡선의 리심률이 2이고 준선의 방정식이 $2x + y = 0$, 모임점이 $F(1,\ 0)$이다. 이 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(설명) 곡선의 임의의 점을 $P(x,\ y)$로 놓으면 쌍곡선의 정의로부터

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\frac{|2x+y|}{\sqrt{5}}} = 2$$

이것을 정돈하면 쌍곡선의 방정식은

$$11x^2 + 16xy - y^2 + 10x - 5 = 0$$

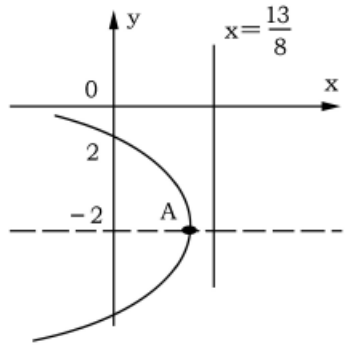
[례2] 모임점이 $\mathrm{F}(\frac{3}{8},\ -3)$이고 준선의 방정식이 $x = \frac{13}{8}$인 포물선의 방정식을 구하여라.

(설명) **첫째 방법:** 점 $P(x,\ y)$를 포물선우의 임의의 점이라고 하면

$$\frac{\sqrt{(x-\frac{3}{8})^2+(x+3)^2}}{\left|\frac{13}{8}-x\right|}=1$$ 이며 간단히

하면 $(y+3)^2=-\frac{5}{2}(x-1)$

그림 3-28

둘째 방법: (그림 3-28) 준선의 방정식이 $x=\frac{13}{8}$ 이므로 포물선의

방정식을 $(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$

$(p>0)$ 으로 놓으면 F 로부터 준선까지의 거리는 $P=\frac{13}{8}-\frac{3}{8}=\frac{5}{4}$

$\therefore \quad FA=\frac{P}{2}=\frac{5}{8}$

정점 A 의 x 자리표는 $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1$ 이므로 $A(1,\ -3)$.

$\therefore$ 포물선의 방정식은

$$(y+3)^2=-\frac{5}{2}(x-1)$$

[례3] 점 $M(1,\ 2)$ 를 지나며 y 축을 준선으로 하고 $e=\frac{1}{2}$ 인 타원의 왼쪽정점의 자리길방정식을 구하여라. (그림 3-29)

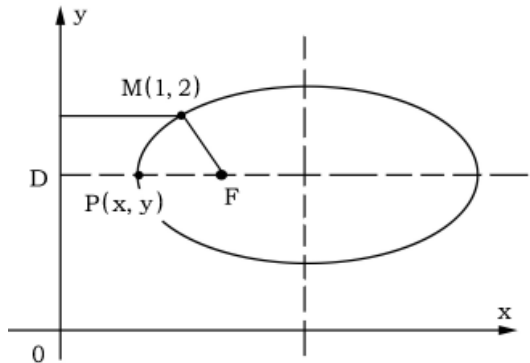



그림 3-29

(설명) 왼쪽정점을 $P(x,\ y)$, 왼쪽모임점을 $F(x_0,\ y_0)$ 로 놓으면 $e=\frac{1}{2}$ 이므로 정점으로부터 준선까지의 거리는 정점으로부터 모임점

까지의 거리의 2배이다.

$\therefore \quad x = 2(x_0 - x)$

즉 $x_0 = \frac{3}{2}x, \quad y_0 = y$

$\therefore \ F(\frac{3}{2}x, \quad y)$

정의로부터 $\frac{MF}{MD} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{\sqrt{(\frac{3}{2}x - 1)^2 + (y-2)^2}}{1} = \frac{1}{2}$

이 식을 정돈하면 $9(x - \frac{2}{3})^2 + 4(y-2)^2 = 1$

[례4] 점 $A(4, \ 0)$을 지나며 원둘레 $x^2 + y^2 = 9$에 접하는 원의 중심의 자리길방정식을 구하여라.

(설명) 원둘레 $x^2 + y^2 = 9$와의 접점을 Q, 중심을 $P(x, \ y)$라고 하면 $|PQ - PO| = 3$이다.

$\therefore$ 점 P의 자리길은 쌍곡선이다.

$2a = 3$으로부터 $a = \frac{3}{2}$

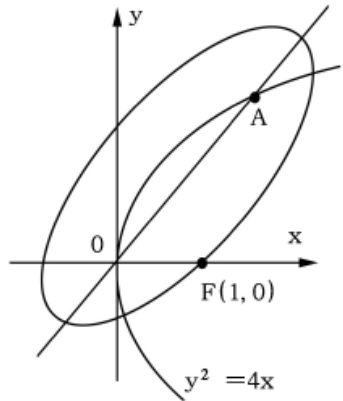
$2c = OA = 4$로부터 $c = 2$

중심은 $(2, \ 0)$, $b^2 = \frac{7}{4}$이므로

쌍곡선의 방정식은 $\frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{7}{4}} = 1$

그림 3－30

[례5] 원점을 지나는 직선이 포물선 $y^2 = 4x$와 점 A(원점이 아님)와 사귄다. A와 원점을 모임점으로 하는 타원이 포물선의 모임점을 지난다고 할 때 긴축의 길이는 6이다. 이 타원의 방정식을 구하여라. (그림 3－30)

(설명) 직선의 방정식을 $y = kx$로 놓으면

$$\begin{cases} y = kx \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow \quad A(\frac{4}{k^2}, \frac{4}{k})$$

$y^2 = 4x$의 모임점은 $F(1,\ 0)$

문제의 의미로부터 $AF + OF = 6$

$$\therefore \sqrt{(\frac{4}{k^2} - 1)^2 + (\frac{4}{k})^2} + 1 = 6 \Rightarrow k = \pm 1$$

즉 $A(4,\ 4)$ 또는 $A(4,\ -4)$

타원의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라고 하면 $PA + PO = 6$이므로

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y \pm 4)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 6$$

즉 $5x^2 \pm 8xy + 5y^2 - 4x \pm 4y - 1 = 0$

[례6] $\triangle ABC$의 세 변의 길이 $a,\ b,\ \mathrm{c}\ (\mathrm{a} > \mathrm{b} > \mathrm{c})$가 같은차수렬을 이루며 $A(-1,\ 0),\ \ C(1,\ 0)$이다. 점 B의 자리길방정식을 구하여라.

(설명) $b = AC = 2$이다.

3각형의 다른 두 변을 $a = 2 + d$, $c = 2 - d$ $(0 < d < 2)$라고 하면

$$BA + BC = 4$$

타원의 정의로부터 점 B의 자리길은 타원이다.

타원의 긴 반경의 길이가 2, 모임점사이의 거리의 절반이 1이므로 짧은 반경은 $\sqrt{3}$이다.

$$\therefore \text{ 방정식은 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$a > b > c$이므로 $x < 0,\ \ x \neq -2$

[례7] 중심이 자리표원점에 있고 긴 반경, 짧은 반경이 각각 자리표축에 있는 타원의 두 준선사이의 거리가 36이다. 이 타원우의 어떤 점의 모임점반경이 각각 9, 15일 때 이 타원의 방정식을 구하여라.

(설명) 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 또는 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$로 놓자.

모임점반경이 9와 15이므로 $2a=9+15,\quad a=12$

$2\times\frac{a^2}{c}=36$이므로 $\frac{144}{c}=18,\quad c=8$

$\therefore\quad b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{80}$

타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{80}=1 \quad \text{또는} \quad \frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{144}=1$$

[례8] $x=\pm4$를 준선으로 하고 $e=\frac{1}{2}$이며 원점을 지나는 타원의 방정식을 구하여라.

(설명) 타원의 중심을 $(0,\ y_0)$이라고 할 때 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$로 놓을수 있다.

$$\begin{cases}\frac{a^2}{c}=4\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \quad a=2,\ c=1$$

$\therefore\quad b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$

타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-y_0)^2}{8}=1$

타원이 원점을 지나므로 $y_0=\pm\sqrt{3}$

즉 구하려는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+\frac{(y\pm\sqrt{3})^2}{3}=1$

[례9] 타원과 쌍곡선이 공통인 모임점을 가지며 리심률의 합이다. 타

원의 방정식이 $25x^2+9y^2=1$일 때 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(설명) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$로 놓자.

타원의 방정식은 $\frac{x^2}{\frac{1}{25}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$

$\therefore \quad c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{4}{15}, \quad e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

즉 쌍곡선의 리심률은 $2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$

쌍곡선과 타원이 공통인 모임점을 가지므로 쌍곡선의 모임점사이의 거리의 절반은 $\frac{4}{15}$이다.

그러므로 실반경은 $a=\frac{4}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{9}$

$\therefore \quad b^2=c^2-a^2=\frac{44}{45^2}$

구하려는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{y^2}{\frac{4}{81}}-\frac{x^2}{\frac{44}{2025}}=1$

[례10] 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이고 준선의 방정식이 $x=\pm\frac{9}{5}$이다. 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(설명) **첫째 방법:** 준선의 방정식이 $x=\pm\frac{9}{5}$이고 쌍곡선의 실축은 x축우에 있고 점근선이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이므로 쌍곡선의 방정식은

$(4x)^2-(3y)^2=k^2$ 즉 $\frac{x^2}{\frac{k^2}{16}}-\frac{y^2}{\frac{k^2}{9}}=1$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{k^2}{16} + \frac{k^2}{9} = \frac{25k^2}{16\times 9}$$

$\frac{a^2}{c} = \frac{9}{5}$ 이므로 $\frac{k^2}{16} \times \frac{12}{5|k|} = \frac{9}{5} \Rightarrow |k| = 12$

∴ 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

둘째 방법: 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$로 놓자.

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \\ \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3}a \\ c = \frac{5}{9}a^2 \end{cases}$$

$c^2 = a^2 + b^2$ 이므로 $(\frac{5}{9}a^2)^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2$

∴ $a^2 = 0$ (버린다.) $a^2 = 9$ 이때 $b = 4$

∴ 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

[례11] 포물선의 정점이 원점에 있고 준선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$의 어느 한 모임점을 지난다. 그리고 포물선과 쌍곡선이 $A(1.5,\ \sqrt{6})$, $B(1.5,\ -\sqrt{6})$에서 사귄다. 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

(설명) 포물선의 방정식을 $y^2 = 2px\ \ (p > 0)$으로 놓자.

$A\ (1.5,\ \sqrt{6})$이 포물선우에 있으므로 방정식에 갈아넣으면 $p = 2$ 이다.

그러므로 포물선의 방정식은 $y^2 = 4x$이다.

포물선의 준선이 쌍곡선의 한 모임점을 지나므로 $c = 1$이다.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 = 1 \\ \frac{\frac{9}{4}}{a^2} - \frac{6}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4},\ \ a^2 = \frac{1}{4}$$

∴ 쌍곡선의 방정식은 $4x^2 - \frac{4}{3}y^2 = 1$

[례12] 정점이 원점에 있고 모임점이 축우에 있으며 직선 $y = 2x + 1$과 사귀여 생기는 활줄의 길이가 $\sqrt{15}$인 포물선의 방정식을 구하여라.

(설명) 구하려는 포물선의 방정식을 $y^2 = mx$로 놓자.

$$\begin{cases} y^2 = mx \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + (4 - m)x + 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{m-4}{4}, \quad x_1x_2 = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{15} = \sqrt{[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2](1 + k^2)}$$ 이므로

$$15 = \left[\left(\frac{m-4}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{4}\right](1 + 4)$$

이 식을 풀면 $m = 12$ 또는 $m = -4$

∴ 구하려는 포물선의 방정식은

$$y^2 = 12x, \quad y^2 = -4x$$

[례13] 포물선의 대칭축의 방정식이 $x - y - 1 = 0$이고 모임점이 $F(1, 0)$이며 포물선은 점 $(0, 1)$을 지난다. 이 포물선의 방정식을 구하여라.

(설명). 포물선의 준선은 대칭축에 수직이므로 준선의 방정식을 $x + y + m = 0$으로 놓을수 있다.

포물선의 임의의 점 $P(x, y)$에 대하여 $(x-1)^2 + y^2 = \left(\frac{|x + y + m|}{\sqrt{2}}\right)^2$

점 $(0, 1)$을 지나므로 이 자리표를 우의 방정식에 갈아넣으면

$$m = 1 \quad \text{또는} \quad m = -3$$

따라서 구하려는 포물선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 2y + 1 = 0$$

또는 $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 6y - 7 = 0$

직선에 의하여 생기는 원뿔곡선의 활줄의 길이 구하기문제

[례1] 직선 $y=x+\frac{3}{2}$ 에 의하여 생기는 포물선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 의 활줄의 길이를 구하여라.

(설명) 직선과 포물선의 사귐점을 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 이라고 하면

$$\begin{cases} y=x+\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2-2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1+x_2=2,\ \ x_1x_2=-3$$

$$\therefore \quad AB=\sqrt{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2](1+k^2)}=\sqrt{(2^2+12)(1+1)}=4\sqrt{2}$$

[례2] 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ 의 활줄의 길이는 4이고 이 활줄에 놓여있는 직선의 변화률이 2이다. 이 직선의 방정식을 구하여라.

(설명) 직선의 방정식을 $y=2x+m$ 이라고 하자.

$$\begin{cases} y=2x+m \\ 2x^2-3y^2=6 \end{cases} \Rightarrow \ 10x^2+12mx+3m^2+6=0$$

직선과 쌍곡선의 사귐점을 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 이라고 하면

$$x_1+x_2=-\frac{6}{5}m, \qquad x_1x_2=\frac{3m^2+6}{10}$$

$$\therefore \quad AB=\sqrt{\left[\left(\frac{6}{5}m\right)^2-4\times\frac{3m^2+6}{10}\right](1+4)}=\sqrt{\frac{6m^2-60}{5}}$$

$$\therefore \quad 16=\frac{6m^2-60}{5}, \qquad m=\pm\frac{\sqrt{210}}{3}$$

따라서 활줄이 놓이는 직선의 방정식은

$$y=2x+\frac{\sqrt{210}}{3}, \qquad y=2x-\frac{\sqrt{210}}{3}$$

[례3] 직선 $\ell: y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이 두 점 A, B 에서 사귄다. AB 의 가운데점이 M 이고 $AB=2\sqrt{5}$, 직선 OM 의 변화률이 $\frac{1}{2}$ 일 때 a, b 를 구하여라.

(설명) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 이라고 하자.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases} \Rightarrow (a^2+4b^2)x^2-8a^2x+16a^2-4a^2b^2=0$$

$$\therefore \quad x_1+x_2=\frac{8a^2}{a^2+4b^2}, \qquad x_1x_2=\frac{16a^2-4a^2b^2}{a^2+4b^2}$$

$$AB=\sqrt{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2](1+k^2)}=$$

$$=\sqrt{\left[\left(\frac{8a^2}{a^2+4b^2}\right)^2-\frac{4(16a^2-4a^2b^2)}{a^2+4b^2}\right](1+\frac{1}{4})}=$$

$$=\frac{2\sqrt{5}ab\sqrt{a^2+4b^2-16}}{a^2+4b^2}$$

$$2\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}ab\sqrt{a^2+4b^2-16}}{a^2+4b^2}$$

$$\therefore \quad ab\sqrt{a^2+4b^2-16}=a^2+4b^2 \quad \cdots\cdots\cdots \text{(ㄱ)}$$

M 이 AB 의 가운데점이므로 M 의 자리표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

즉 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \quad \frac{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+4}{2}\right)$

$$K_{OM}=\frac{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+4}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}+\frac{4}{x_1+x_2}$$

$x_1+x_2=\frac{8a^2}{a^2+4b^2}$ 을 각각 갈아넣으면 $K_{OM}=\frac{2b^2}{a^2}$

$\therefore \quad \frac{1}{2}=\frac{2b^2}{a^2}, \quad a^2=4b^2$ ………… (ㄴ)

(ㄱ), (ㄴ)로부터 $a=4, \ b=2$ 이다.

원뿔곡선의 활줄의 가운데점에 관한 문제

[례1] 쌍곡선 $x^2-4y^2-4x-24y-36=0$ 의 한 활줄 AB 가 점 $M(5, \ -2)$ 에 의하여 2등분된다. 활줄 AB 가 놓이는 직선의 방정식을 구하여라.

(설명) $A(x_1, \ y_1)$ 라고 하면 $M(5, \ -2)$ 가 활줄 AB 의 가운데점이므로 $B(10-x_1, \ -4-y_1)$ 이다.

$A, \ B$ 는 쌍곡선우의 점이므로

$$\begin{cases} x_1^2-4y_1^2-4x_1-24y_1-36=0 & (ㄱ) \\ (10-x_1)^2-4(-4-y_1)^2-4(10-x_1)-24(-4-y_1)-36=0 & (ㄴ) \end{cases}$$

ㄱ)－(ㄴ)로부터 $3x_1-4y_1-23=0$ 이다.

$A, \ M$ 의 자리표는 이 같기식을 만족시키므로 직선 AB 의 방정식은 $3x_1-4y_1-23=0$ 이다.

[례2] 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 과 점 $P(1, \ 2)$ 가 주어졌다. 점 P 를 지나며 쌍곡선과 두 점 $A, \ B$ 에서 사귀는 직선 ℓ 을 그었을 때 점 P 가 선분 AB 의 가운데점으로 되였다.

1) 직선 AB 의 방정식을 구하여라.

2) $Q(1, \ 1)$ 을 가운데점으로 하는 활줄이 존재하지 않는다는것을 증명하여라.

(설명) 1) 점 $P(1, \ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식을 $y-2=k(x-1)$ 로 놓자.

$$\begin{cases} y-2=k(x-1) \\ 2x^2-y^2=2 \end{cases} \Rightarrow (2-k^2)x^2+(2k^2-4k)x-(k^2-4k+6)=0$$

$D=4(k^2-2k)^2+4(2-k^2)(k^2-4k+6)>0$ 을 풀면 $k<\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k-k^2}{2-k^2}=1$ 이므로 $k=1$

∴ 구하려는 직선의 방정식은 $x-y+1=0$

2) $Q(1,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y-1=k(x-1)$ 로 놓자.

$$\begin{cases} y-1=k(x-1) \\ 2x^2-y^2=2 \end{cases} \Rightarrow (2-k^2)x^2+(2k^2-2k)x-k^2+2k-3=0$$

$$D=(2k^2-2k)^2-4(2-k^2)(-k^2+2k-3)>0 \Rightarrow k<\frac{3}{2}$$

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k-2k^2}{2(2-k^2)}=1 \Rightarrow \mathrm{k}=2$$

$2\notin(-\infty,\ \dfrac{3}{2})$ 이므로 조건에 맞는 활줄은 없다.

원뿔곡선의 모임점을 지나는 활줄에 관한 문제

[례1] 포물선 $y^2=4x$ 의 모임점을 지나는 한 활줄 AB 를 그었다. 이 활줄의 길이가 8을 넘지 않으며 직선 AB 의 경사각 α 의 범위를 결정하여라.

(설명) 모임점이 $F(1,\ 0)$ 이므로 점 F 를 지나는 직선의 방정식을 $y=k(x-1)$ 로 놓자.

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y=k(x-1) \end{cases} \Rightarrow k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$$

직선과 포물선의 사귐점을 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 이라고 하면

$$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}, \qquad x_1x_2=1$$

$$AB=\sqrt{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2](1+k^2)}=$$

$$=\sqrt{\left[\left(\frac{2k^2+4}{k^2}\right)^2-4\right](1+k^2)}=\frac{4(k^2+1)}{k^2}\le 8$$ 이므로

이 식을 풀면 $k\le -1$ 또는 $k\ge 1$ (ㄱ)

또한 $\begin{cases}3x^2+2y^2=2\\ y=k(x-1)\end{cases} \Rightarrow (3+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$

직선과 타원이 서로 사귀므로

$$D=-k^2+3>0 \Rightarrow -\sqrt{3}<k<\sqrt{3} \quad (ㄴ)$$

(ㄱ)와 (ㄴ)로부터

$$-\sqrt{3}<k<-1 \quad 또는 \quad 1\le k\le\sqrt{3}$$

$0<\alpha<\pi$, $1\le\tan\alpha<\sqrt{3}$ 또는 $-\sqrt{3}<\tan\alpha\le -1$ 로부터

$$\frac{\pi}{4}\le\alpha<\frac{\pi}{3} \quad 또는 \quad \frac{2}{3}\pi<\alpha<\frac{3}{4}\pi$$

[례2] 포물선 $y^2=4x$ 와 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b}=1$ 이 공통인 모임점 F 를 가진다.

1) b 를 구하여라.

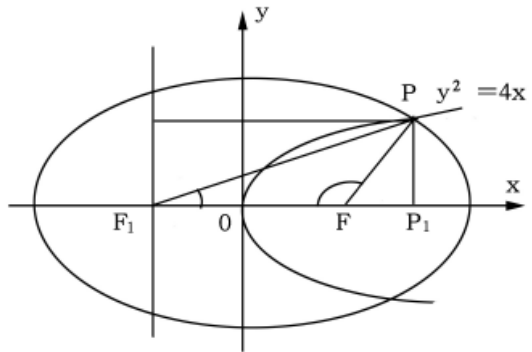
2) 점 P 가 두 곡선의 한 공통점이고 F_1 가 타원의 다른 한 모임점이며 $\angle PF_1F=\alpha$, $\angle PFF_1=\beta$ 일 때 $\cos\alpha\times\cos\beta$ 를 구하여라.

그림 3-31

3) ΔPF_1F 의 면적을 구하여라. (그림3-31)

(설명) 1) $y^2=4x$ 로부터 $F(1,\ 0)$ 이다.

타원과 포물선이 공통인 모임점을 가지므로

$$b=9-1=8$$

2) 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

$P(x_1,\ y_1)$라고 하면

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\\ y^2=4x\end{cases} \Rightarrow \quad 2x^2+9x-18=0$$

$x_1=\frac{3}{2}$, $\quad x_2=-6$ (버린다.)

$$PF_1=a+ex_1=3+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

$$PF=a-ex_1=3-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

P 에서 x 축에 대한 수직선의 밑점을 P_1라고 하면 $\cos\alpha=\frac{5}{7}$

$\cos(\pi-\beta)=\frac{1}{5}$ 이므로 $\quad \cos\alpha\cdot\cos\beta=-\frac{1}{7}$

3) $\cos\alpha=\frac{5}{7}$ 이므로 $\quad \sin\alpha=\frac{2}{7}\sqrt{6}$

$\therefore \quad S_{\triangle PFF_1}=\frac{1}{2}PF_1\cdot PF\cdot\sin\alpha=\sqrt{6}$ 이다.

원뿔곡선의 접점을 지나는 활줄에 관한 문제

[례1] 점 $P(x_0,\ y_0)$을 지나 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 두 접선(점 P를 지나는 접선이 존재한다.)을 그었다. 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(설명) 두 접점을 $Q_1(x_1,\ y_1)$, $Q_2(x_2,\ y_2)$이라고 하면 두 접선의 방정식은 각각

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1, \quad \frac{xx_2}{a^2}-\frac{yy_2}{b^2}=1$$

점 $P(x_0,\ y_0)$이 접선에 놓이므로

$$\frac{x_0x_1}{a^2}-\frac{y_0y_1}{b^2}=1, \quad \frac{x_0x_2}{a^2}-\frac{y_0y_2}{b^2}=1$$

이 식으로부터 직선 Q_1Q_2의 방정식은 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$

[례2] 타원의 두 준선의 임의의 한 점에서 타원에 그은 두 접선의 접점들을 끝점으로 하는 활줄은 일정한 점을 지난다는것을 증명하여라.

(설명) 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$로 놓으면

오른쪽준선의 방정식은 $x=\frac{a^2}{c}$으로 된다.

오른쪽준선의 임의의 한 점을 $P\left(\frac{a^2}{c},\ y_0\right)$이라고 하면

점 P에서 타원에 그은 접선의 방정식은

$$\frac{\frac{a^2}{c}x}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

즉 $b^2x-b^2c+cyy_0=0$

이 식은 임의의 y_0에 대하여 성립하여야 하므로

$$\begin{cases} b^2x-b^2c=0 \\ cy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=c \\ y=0 \end{cases}$$

따라서 접점을 끝점으로 하는 활줄은 일정한 점 $(c,\ 0)$ 즉 타원의 오른쪽모임점을 지난다.

마찬가지로 왼쪽준선의 임의의 점에서 타원에 그은 접선의 접점을 끝점으로 하는 활줄은 왼쪽모임점 $(-c,\ 0)$을 지난다.

원뿔곡선의 접선에 관한 문제

[례1] 점 $(0,\ 1)$을 지나며 $y^2=4x$에 접하는 접선의 방정식을 구하여라.

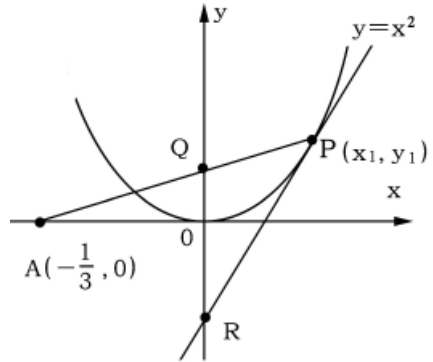
(설명) 접선의 방정식을 $y-1=kx$로 놓자.

$$\begin{cases} y^2=4x \\ y-1=kx \end{cases} \Rightarrow k^2x^2+(2k-4)x+1=0$$

$D=0$ 으로부터 $k=1$

$\therefore$ 구하려는 접선의 방정식은 $x-y+1=0,\ \ x=0$

그림 3−32

[례2] 포물선 $y=x^2$ 과 점 $A\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ 이 주어졌다. 포물선의 오른쪽가지의 한 점 P에서 곡선에 그은 접선이 y 축과 점 P 에서, 곡선에 그은 접선이 y 축과 점 Q 에서 사귄다. 직선 AP 가 y 축과 점 R 에서 사귄다고 할 때 $PQ=RQ$ 이면 점 P 의 자리표를 구하여라. (그림 3−32)

(설명) $P(x_1, y_1)$ 로 놓으면 점 P 를 지나는 접선의 방정식은

$$\frac{y_1+y_2}{2}=xx_1$$

$$\begin{cases} y+y_1=2xx_1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow\ R(0,\ -y_1)$$

$A(-\dfrac{1}{3},\ 0)$ 이므로 직선 AP 의 방정식은 $3y_1x-(1+3x_1)y+y_1=0$

$$\begin{cases} 3y_1x-(1+3x_1)y+y_1=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow\ Q\left(0,\ \frac{y_1}{1+3x_1}\right)$$

$PQ=RQ$ 이므로 $\sqrt{x_1^2+\left(y_1-\dfrac{y_1}{3x_1+1}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{y_1}{3x_1+1}+y_1\right)^2}$

또한 $P(x_1,\ y_1)$ 는 포물선우에 있으므로 $y_1=x_1^2$ 이다.

이것을 웃식에 갈아넣고 간단히 하면

$$(x-1)(3x+1)(4x+1)=0$$

$x>0$ 이므로 $x=1$ 이다. $\therefore$ $P(1,\ 1)$

[례3] 쌍곡선 $x^2-4y^2=16$의 한 접선이 두 자리표축을 잘라낸 부분의 길이가 서로 같다. 접점의 자리표를 구하여라.

(설명) 접점을 $P(x_1,\ y_1)$로 놓으면 접선의 방정식은

$$xx_1-4yy_1=16$$

접선이 자리표축을 잘라내는 부분의 길이가 같으므로

$$\begin{cases} xx_1-4yy_1=16 \\ x=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} xx_1-4yy_1=16 \\ y=0 \end{cases}$$

우의 식으로부터 $y=-\dfrac{4}{y_1}$, $x=\dfrac{16}{x_1}$

$$\therefore \quad -\frac{4}{y_1}=\frac{16}{x_1}, \qquad x_1=-4y_1 \qquad (ㄱ)$$

점 $P(x_1,\ y_1)$는 곡선우에 있으므로

$$x_1^2-4y_1^2=16 \qquad (ㄴ)$$

(ㄱ)를 (ㄴ)에 갈아넣으면 $16y_1^2-4y_1^2=16$

$$\therefore \quad y_1=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad x_1=\mp\frac{8}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ 접점의 자리표는 $\left(\dfrac{8\sqrt{3}}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 또는 $\left(-\dfrac{8\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

[례4] 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$과 포물선 $y^2=-20x$의 공통접선의 방정식을 구하여라.

(설명) 공통접선의 방정식을 $y=kx+b$로 놓으면

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=kx+b \end{cases} \Rightarrow (9+16k^2)x^2+32kbx+16(b^2-9)=0$$

서로 접하므로 $D=0 \Rightarrow b^2=9+16k^2$ (ㄱ)

$$\begin{cases} y^2=-20x \\ y=kx+b \end{cases} \Rightarrow k^2x^2+(2kb+20)x+b^2=0$$

그러므로 $D=0 \Rightarrow kb=-5$ (ㄴ)

(ㄱ), (ㄴ)로부터 $k=1$일 때 $b=-5$

$k=-1$일 때 $b=5$

∴ 공통접선의 방정식은

$y=x-5$ 또는 $y=-x+5$

[례5] 쌍곡선의 두 점근선과 그의 임의의 점에서 그은 접선으로 둘러막힌 3각형의 면적이 상수임을 증명하여라. (그림 3－33)

(설명) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$로 놓자.

그러면 곡선의 임의의 한 점 $P(x_0, y_0)$을 지나는 접선의 방정식은

$$b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2$$

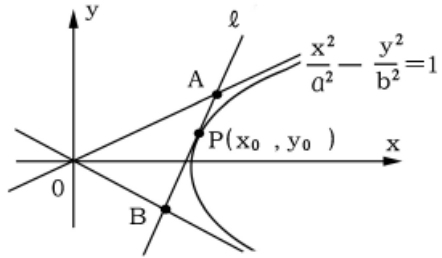



그림 3－33

점근선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \\ b^2x_0x-a^2y_0y-a^2b^2=0 \end{cases}$$

우의 두 식으로부터 접선과 두 점근선의 사귐점의 자리표는

$$A\left(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0},\quad \frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right),\qquad B\left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0},\quad \frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}\right)$$

$$\therefore \quad OA=\sqrt{\left(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}\right)^2+\left(\frac{ab^2}{bx_0-ay_0}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(bx_0-ay_0)^2}}$$

$$OB=\sqrt{\left(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}\right)^2+\left(\frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(bx_0+ay_0)^2}}$$

즉 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OA\times OB\times\sin\angle AOB=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left[a^2b^2\left(a^2+b^2\right)\right]^2}{(b^2x_0^2-a^2y_0^2)^2}}\sin\angle AOB=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}\sin\angle AOB=\frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin\angle AOB$$

$\angle AOB$는 두 점근선사이의 각이므로 일정하다.

따라서 $S_{\triangle OAB}$는 일정하다.

[례6] 포물선 $y^2=2x$가 주어졌다. 반경이 1인 원둘레의 중심이 x축 우에서 움직인다. 원이 어느 위치에 있을 때 포물선과 원둘레의 사귐점에서 두 곡선에 그은 접선들이 서로 수직으로 사귀겠는가를 구하여라.

(설명) 타원과 포물선의 사귐점을 $P(x_0,\ y_0)$으로 놓자. $(x>0)$ (그림 3—34)

그러면 점 P를 지나는 포물선의 접선 ℓ_1의 방정식은 $y_0y=x+x_0$

ℓ_1와 x축과의 사귐점을 A라고 하면

$$\begin{cases} y_0y=x+x_0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=-x_0$$

즉 $A(-x_0,\ 0)$

접점을 지나며 접선에 수직인 직선은 반드시 원의 중심을 지나며 원의 중심은 x축에 있으므로 A는 원의 중심이다.

$\therefore$ 원둘레의 방정식은

$$(x+x_0)^2+y^2=1$$

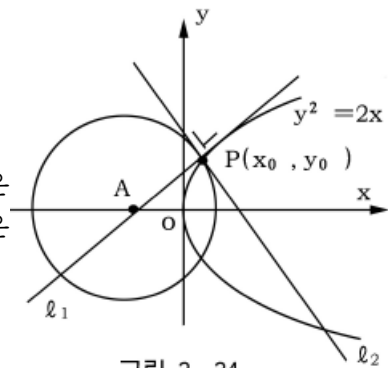



그림 3-34

$P(x_0, y_0)$은 이 원둘레에 있으므로 $4x_0^2 + y_0^2 = 1$ (ㄱ)

한편 $P(x_0, y_0)$은 포물선우에 있으므로 $y_0^2 = 2x_0$ (ㄴ)

(ㄱ), (ㄴ)로부터 $4x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0$

$$\therefore \quad x_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{또는} \quad x_0 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \text{ (버린다.)}$$

∴ 조건에 맞는 원의 중심은

$$\left(-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad 0\right)$$

최대값, 최소값문제

[례1] 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 우의 한 점 $B(0, -b)$에서 활줄 BM을 그었다. BM의 최대값 및 그때의 점 M의 자리표를 구하여라.

그림 3－35

(설명) 타원우의 점을 $M(x, y)$라고 하면 $y \in (-b, b)$이다. (그림 3－35)

두 점사이의 자리공식으로부터

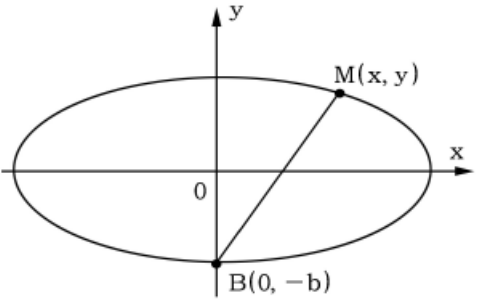
$$BM^2 = x^2 + (y+b)^2$$

$M(x, y)$는 타원우에 있으므로

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2$$

$$\therefore \quad BM^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 + y^2 + 2by + b^2 =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{b^2} y^2 + 2by + a^2 + b^2 =$$

$$= -\frac{a^2 - b^2}{b^2} (y - \frac{b^3}{c^2})^2 + \frac{b^4 + a^2c^2 + b^2c^2}{c^2}$$

$\frac{a^2-b^2}{b^2}$이므로 BM^2은 최대값을 가진다.

1) $\frac{b^2}{c^2} \le b$일 때 즉 $b^2 \le c^2 \Rightarrow b < c$일 때 $y = \frac{b^3}{c^2}$에서 BM^2은 최대값을 가진다.

$$BM^2_{최대값} = \frac{b^4 + a^2c^2 + b^2c^2}{c^2} = \frac{(b^2+c^2)^2}{a^2-b^2} = \frac{a^4}{a^2-b^2}$$

$$\therefore \ BM_{최대값} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

이때 M의 자리표는 $\left(\pm\frac{a^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-2b^2}, \ \frac{b^3}{a^2-b^2}\right)$

2) $\frac{b^2}{c^2} > b$일 때 즉 $b^2 > c^2$일 때 $b > c$이면 y는 뜻구역 $(-b, \ b)$에 들지 않으므로 $BM_{최대값}$은 끝점에서 취한다.

$y = b$일 때 $BM_{최대값} = 2b$

즉 M의 자리표는 $(0, \ b)$이다

[례2] 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$의 접선과 두 자리표축이 각각 두 점 A, B에서 사귄다. $\triangle OAB$의 최소면적을 구하여라.

(설명) **첫째방법:** 접점을 $P(x_0, \ y_0)$이라고 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ 접선과 } x\text{축과의 사귐점은 } A\left(\frac{a^2}{x_0}, \ 0\right)$$

$$\begin{cases} \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ 접선과 } x\text{축과의 사귐점은 } B\left(0, \ \frac{b^2}{y_0}\right)$$

$$\therefore \quad S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times OA\times OB=\left|\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}\right|$$

(x_0, y_0)이 타원우에 놓이므로 $y_0=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$ 이다.

이것을 웃식에 갈아넣으면

$$S_{\triangle OAB}=\frac{a^3b}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x_0^2(a^2-x_0^2)}}\geq\frac{a^3b}{2}\times\frac{2}{a^2}=ab$$

$\therefore \quad x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}a$일 때 $S_{\triangle OAB}$는 최소값 ab를 가진다.

둘째 방법: 접점을 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$로 놓으면 접선 AB의 방정식은 $\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$

$\begin{cases}\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1\\ y=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ 접선과 축과의 사귐점은 $A\left(\frac{a}{\cos\theta}, 0\right)$

$\begin{cases}\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1\\ x=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ 접선과 축과의 사귐점은 $B\left(0, \frac{b}{\sin\theta}\right)$

$$\therefore \quad S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times OA\times OB=\left|\frac{ab}{2\cos\theta\sin\theta}\right|=\left|\frac{ab}{\sin 2\theta}\right|$$

$|\sin 2\theta|\leq 1$ 이므로 $S_{최소값}=ab$

셋째 방법: 접선의 변화률을 k, 접선이 x축, y축과 사귀는 점을 각각 A, B라고 하면 접선 AB의 방정식은

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$$

$\angle BAO=\alpha$로 놓으면 $k=|\tan\alpha|$이다.

$\therefore$ 접선 AB의 방정식은

$$y=|\tan\alpha|x\pm\sqrt{a^2\tan^2\alpha+b^2}=\pm\tan\alpha\cdot x\pm\sqrt{a^2\tan^2\alpha+b^2}$$

$$\therefore \quad OA = \frac{\sqrt{a^2 \tan^2 \alpha + b^2}}{|\tan \alpha|}, \qquad OB = \sqrt{a^2 \tan^2 \alpha + b^2}$$

$$\therefore \quad S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{a^2 \tan^2 \alpha + b^2}{2|\tan \alpha|}$$

즉 $a^2 \tan^2 \alpha \pm 2 \tan \alpha \cdot S + b^2 = 0$

$\tan \alpha$ 는 실수이므로 $D \geq 0 \quad \Rightarrow \quad D = 4S^2 - 4a^2 b^2 \geq 0, \quad S \geq ab$

$$\therefore \quad S_{최소} = ab$$

[례3] 직선 $x + y - 3 = 0$과 포물선 $y^2 = 4x$가 A, B에서 사귄다. 포물선 $\overset{\frown}{AOB}$우에서 한 점 C를 구하되 $\triangle ABC$의 면적이 최대로 되게 하여라. (그림 3−36)

(설명) 직선 $x + y - 3 = 0$에 평행이고 포물선에 접하는 직선 ℓ의 방정식을 $\ell: x + y + m = 0$ 으로 놓자.

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x + y + m = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 4y + 4m = 0$$

$$D = 16 - 16m = 0, \quad m = 1$$

그러므로 직선 ℓ의 방정식은

$$x + y + 1 = 0$$

$$\therefore \quad \begin{cases} y^2 = 4x \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 0$$

즉 $(y + 2)^2 = 0$

$$y = -2, \quad x = \frac{y^2}{4} = \frac{(-2)^2}{4} = 1$$

$\therefore$ 접점은 $C(1, \ -2)$

즉 점 $C(1, \ -2)$로부터 직선 AB까지의 거리가 최대로 된다. 이때 $\triangle ABC$의 면적은 최대로 된다.

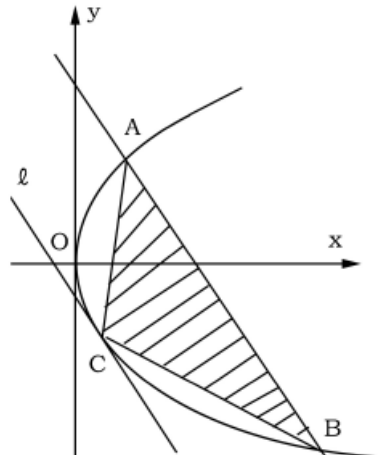



그림 3−36

[례4] 포물선 $y^2=8x$와 점 $M(5,\ 0)$이 있다. 점 M을 중심으로 하고 반경이 1인 원둘레 M의 임의의 한 점 Q와 $y^2=8x$의 한 점 P를 취하였다. PQ의 최소값 및 PQ가 최소로 될 때의 점 P의 자리표를 구하여라. (그림 3−37)

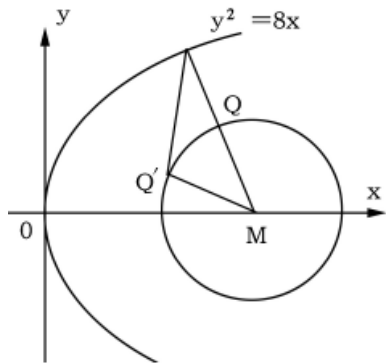



그림 3−37

(설명) 포물선우의 임의의 한 점을 $P\left(\dfrac{y_1^2}{8},\ y_1\right)$로 놓으면

$$PM=\sqrt{\left(\frac{y_1^2}{8}-5\right)^2+y_1^2}=\sqrt{\frac{1}{64}y_1^4-\frac{1}{4}y_1^2+25}$$

$$y_1^2=8$$

즉 $y_1=\pm 2\sqrt{2},\ \ x=1$일 때 $PM_{최소}=2\sqrt{6}$

$$\therefore\quad PQ_{최소값}=2\sqrt{6}-1,\qquad P(1,\ \pm 2\sqrt{2})$$

[례5] 타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$과 직선 $\ell: x-y+9=0$이 있다. 직선 ℓ의 한 점 M을 지나며 주어진 타원의 모임점 $F_1,\ F$를 모임점으로 하는 타원을 그린다. 점 M이 어느 위치에 있을 때 새로 얻은 타원의 긴 축이 가장 짧겠는가? 이때의 타원의 방정식을 구하여라. (그림 3−38)

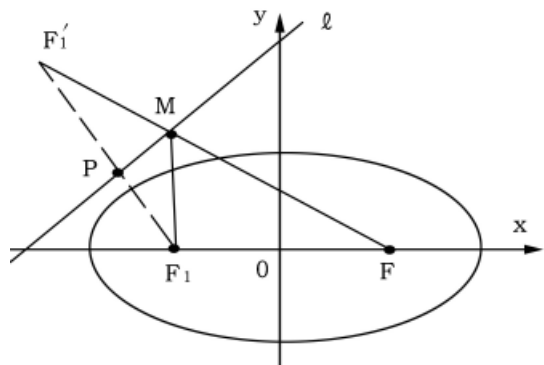



그림 3−38

(설명) 타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$의 모임점은 $F_1(-3,\ 0)$, $F(3,\ 0)$이다.

점 F_1의 직선 ℓ에 관

한 대칭점을 F_1' 라고 하면 $F_1'(-9,\ 6)$ 이므로 직선 $F_1'F$ 의 방정식은 $x+2y-3=0$ 이다.

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \ell \text{과 } F_1'F \text{의 사귐점은 } M(-5,\ 4) \text{이다.}$$

즉 $M(-5,\ 4)$ 를 지나는 타원의 긴축이 가장 짧다.

$MF_1+MF=2a$ 이므로 $2a=6\sqrt{5}$, $a=3\sqrt{5}$

$\therefore \quad a^2=45, \quad c^2=9, \quad b^2=36$

구하려는 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$

[례6] 점 P 가 타원 $x^2+4y^2=4$ 우에서 움직이고있다. 그리고 점 Q 는 원둘레 $A: x^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{4}$ 우에서 움직이고있다. PQ 의 최대값 및 그 때의 점 P 의 자리표를 구하여라. (그림 3－39)

(설명) 타원의 한 점을 $P(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ 로 놓자.

$$AP^2=4\cos^2\theta+(\sin\theta-2)^2=-3(\sin\theta+\frac{2}{3})^2+\frac{28}{3}$$

$\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 일 때

$$AP^2_{\text{최대}}=\frac{28}{3}, \qquad AP_{\text{최대}}=\frac{2}{3}\sqrt{21}$$

$$\therefore \quad PQ_{\text{최대}}=\frac{2}{3}\sqrt{21}+\frac{1}{2}$$

$\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 이므로

점 P 의 자리표는 $P_1\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$,

$$P_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$$

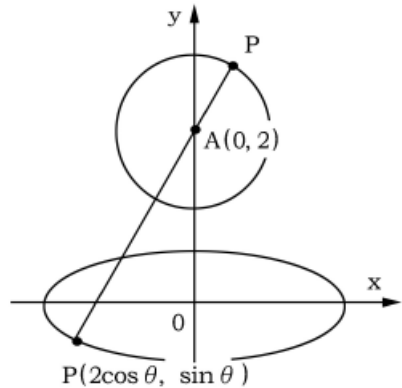



그림 3－39

P_1A, P_2A의 연장선이 원둘레와 사귀는 점을 각각 Q_1, Q_2이라고 하면

$$P_1Q_1 = P_2Q_2 = \frac{2}{3}\sqrt{21} + \frac{1}{2}$$

이것이 최대값임을 밝히자.

원둘레의 임의의 점을 Q, 타원우의 임의의 점을 P라고 하면

$$AP + AQ \geq PQ$$

같기표는 P, Q, A가 한직선우에 있을 때 성립하는데

$AQ_1 = AQ$, $AP_1 \geq AP$ 이므로

$P_1Q_1 = AP_1 + AQ_1 \geq AP + AQ \geq PQ$

즉 $PQ \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{21}$ 이다.

$\therefore$ $PQ_{최대} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{21}$, 이때 점 P의 자리표는

$$\left(-\frac{2}{3}\sqrt{5},\ -\frac{2}{3}\right),\quad \left(\frac{2}{3}\sqrt{5},\ -\frac{2}{3}\right)$$

몇가지 증명문제

[례1] 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{b_0^2} = 1$이 공통인 모임점 F_1, F_2을 가진다. 점 P가 그것들의 한 사귐점일 때 다음것을 증명하여라. (그림 3−40)

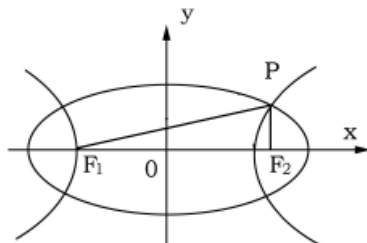
그림 3−40

1) $\angle F_1PF_2 = 2\arctan\frac{b_2}{b_1}$

2) $S_{\Delta F_1PF_2} = b_1b_2$

(설명) 1) 타원, 쌍곡선의 정의로부터

$$\begin{cases} PF_1 + PF_2 = 2a_1 \\ PF_1 - PF_2 = 2a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PF_1 = a_1 + a_2 \\ PF_2 = a_1 - a_2 \end{cases}$$

(P가 1사분구의 사귐점이라고 하여도 일반성을 잃지 않는다.)

$\angle F_1PF_2 = \alpha$ 라고 하면

$$\cos\alpha = \frac{(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-4c^2}{2(a_1^2-a_2^2)} = \frac{a_1^2+a_2^2-2c^2}{a_1^2-a_2^2}$$

$$= \frac{(a_1^2-c^2)-(c^2-a_2^2)}{(a_1^2-c^2)+(c^2-a_2^2)} = \frac{b_1^2-b_2^2}{b_1^2+b_2^2}$$

$$\cos(2\arctan\frac{b_1}{b_2}) = \frac{1-\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2}{1+\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2} = \frac{b_1^2-b_2^2}{b_1^2+b_2^2} = \cos\alpha$$

그리고 α, $2\arctan\frac{b_1}{b_2} \in (0, \pi)$ 이므로 $\alpha = 2\arctan\frac{b_2}{b_1}$

2) $\cos\alpha = \frac{b_1^2-b_2^2}{b_1^2+b_2^2}$, $\alpha \in (0, \pi)$ 이므로

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{b_1^2-b_2^2}{b_1^2+b_2^2}\right)^2} = \frac{2b_1b_2}{b_1^2+b_2^2}$$

$$\therefore \quad S_{\Delta F_1PF_2} = \frac{1}{2}(a_1+a_2)(a_1-a_2)\cdot\frac{2b_1b_2}{b_1^2+b_2^2} =$$

$$= b_1b_2\frac{a_1^2-a_2^2}{b_1^2+b_2^2} = b_1b_2\frac{(a_1^2-c^2)+(c^2-a_2^2)}{b_1^2+b_2^2}$$

$$= b_1b_2\frac{b_1^2+b_2^2}{b_1^2+b_2^2} = b_1b_2$$

[례2] 포물선 $y^2 = 2px$ $(p>0)$의 임의의 점 $M(x_1, y_1)$와 모임점 F를 맺는 직선이 포물선과 점 N에서 사귄다. M, N으로부터 x축에 내린 수직선의 밑점을 각각 P, Q라고 할 때 $MP\cdot NQ$가 일정함을 증명하여라. (그림 3−41)

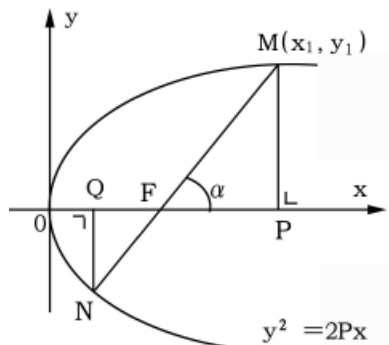



그림 3−41

(설명) $M(x_1,\ y_1)$, $F(\frac{P}{2},\ 0)$일 때

직선 MF의 방정식은 $x=\frac{y}{y_1}(x_1-\frac{P}{2})+\frac{P}{2}$

$N(x_2,\ y_2)$이라고 하자.

$$\begin{cases} x=\frac{y}{y_1}(x_1-\frac{P}{2})+\frac{P}{2} \\ y^2=2Px \end{cases} \Rightarrow y^2-\frac{2P}{y_1}(x_1-\frac{P}{2})y-P^2=0$$

풀이와 결수사이의 관계로부터 $y_1y_2=-P^2$

$MP\perp x$축, $NQ\perp x$축이므로 $MP=|y_1|$, $NQ=|y_2|$

$\therefore\ MP\cdot NQ=|y_1\cdot y_2|=P^2$ (상수)

[례3] 쌍곡선 $x^2-y^2=a^2$의 임의의 한 점 P에서 x축에 수직선을 긋고 쌍곡선과 사귀는 다른 한 점을 Q라고 할 때 두 정점에서 활줄 PQ를 보는 각들은 서로 보탬각을 이룬다는것을 증명하여라. (그림 3－42)

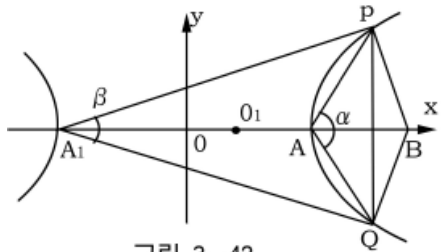



그림 3－42

(설명) $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$로 놓자.

쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$이므로 정점의 자리표는

$A_1(-a,\ 0)$, $A(a,\ 0)$

점 A의 활줄 PQ에 관한 대칭점을 B라고 하면 $B(2x_1-a,\ 0)$이고 $\angle PBQ=\angle PAQ=\alpha$이다.

A_1B의 가운데점 $O_1=(x_1-a,\ 0)$을 중심으로 하고 $\frac{1}{2}A_1B$를 반경으로 하는 원둘레의 방정식은 $[x-(x_1-a)]^2+y^2=x_1^2$ (ㄱ)

$P(x_1,\ y_1)$를 (ㄱ)에 갈아넣으면 $a^2+y_1^2=x_1^2$

P는 쌍곡선의 점이므로 $x_1^2-y_1^2=a^2$

$\therefore$ 점 P는 원둘레 O_1우에 있다.

마찬가지로 점 Q는 원둘레 O_1우에 있다.

4각형 A_1PBQ는 원에 내접하므로

$$\angle PBQ + \angle PA_1Q = \pi \qquad \therefore \quad \angle PAQ + \angle PA_1Q = \pi$$

그림 3－43

[례4] 쌍곡선의 임의의 점에서 쌍곡선에 그은 접선은 그 점에서 두 모임점을 보는 각을 2등분한다는것을 증명하여라. (그림 3－43)

(설명) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 쌍곡선의 임의의 점을 $P(x_1, y_1)$ (오른쪽가지의 점이라고 하여도 일반성을 잃지 않는다.), 점 P에서 그은 접선이 x축과 사귀는 점을 M, 왼쪽, 오른쪽모임점을 각각 $F_1(-c, 0)$, $F(c, 0)$이라고 하자.

$$PF_1 = |ex_1 + a|, \quad PF = |ex_1 - a|$$

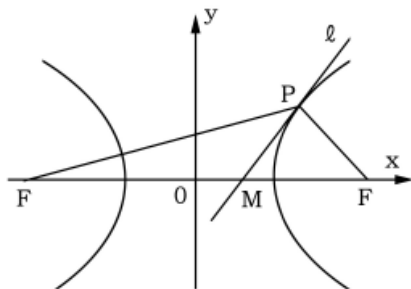
점 P를 지나는 접선의 방정식은

$$\ell : b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$$

접선과 x축과의 사귐점은 $M(\frac{a^2}{x_1}, 0)$

그러므로 $F_1M = \left|c+\frac{a^2}{x_1}\right|$, $FM = \left|c-\frac{a^2}{x_1}\right|$

$$\therefore \quad \frac{F_1M}{FM} = \frac{\left|c+\frac{a^2}{x_1}\right|}{\left|c-\frac{a^2}{x_1}\right|} = \frac{|cx_1+a^2|}{|cx_1-a^2|} = \frac{|ex_1+a|}{|ex_1-a|} = \frac{PF_1}{PF}$$

즉 PM은 $\angle F_1PF$의 2등분선이다.

련습문제

1. 방정식 $2x^2-y^2-4x-2y+1=0$ 이 나타내는 곡선은 (　　)이다.

① 두개의 서로 사귀는 직선　　② 두 평행인 직선

③ 타원　　④ 쌍곡선

2. 상수 $a>0$ 에 대하여 타원 $x^2-2ax+a^2y^2=0$ 의 긴축이 짧은축의 2배이면 a 는 (　　)이다.

① $\frac{1}{2}$　　② 2　　③ $\frac{1}{2}$ 또는 2　　④ $\sqrt{2}$

3. 아래의 쌍곡선들가운데서 $y=\pm\frac{1}{3}x$ 를 점근선으로 하는것은 (　　)이다.

① $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{81}=1$　　② $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{9}=1$

③ $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　④ $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

4. 포물선 $y^2=2px$ 와 $y^2=2q(x-h)$ 가 공통인 모임점을 가지면 p, q, h 사이의 관계는 (　　)이다.

① $2h=p+q$　　② $2h=-p-q$

③ $2h=-p+q$　　④ $2h=p-q$

5. 쌍곡선의 모임점사이거리가 $2c$, 두 접선사이의 거리가 d 일 때 $d=c$ 이면 리심률 e는 (　　)이다.

① $\sqrt{3}$　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ 3

6. 포물선 $y=ax^2(a<0)$ 의 모임점의 자리표는 (　　)이다.

① $\left(0,\ \frac{a}{4}\right)$　　② $\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$　　③ $\left(0,\ -\frac{1}{4a}\right)$　　④ $\left(0,\ -\frac{a}{4}\right)$

7. 방정식 $2x^2-5x+2=0$ 의 두 풀이를 각각 (　　)로 되게 할수

있다.

① 한 타원과 한 쌍곡선의 리심률

② 한 타원과 한 포물선의 리심률

③ 한 쌍곡선과 한 포물선의 리심률

④ 두 타원과 리심률

8. $y=\pm\frac{1}{2}x$ 를 점근선으로 하고 한 접선이 $5x-6y-8=0$ 인 쌍곡선의 방정식은 (　　)이다.

① $\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　② $\frac{y^2}{4}-x^2=1$

③ $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 또는 $\frac{y^2}{4}-x^2=1$　　④ $\frac{x^2}{2}-y^2=1$

9. F는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 의 오른쪽모임점이고 $P(x, y)$ 는 타원우의 임의의 한 점이면 PF의 값은 (　　)이다.

① $ex+a$　　② $ex-a$　　③ $e-ax$　　④ $a-ex$

10. 방정식 $ax^2-ay^2=b$ $(ab<0)$은 (　　)를 나타낸다.

① 모임점이 x 축우에 있는 쌍곡선

② 모임점이 y 축우에 있는 등변쌍곡선

③ 모임점이 x 축우에 있는 등변쌍곡선

④ 모임점이 y 축우에 있는 쌍곡선

11. 쌍곡선 $y^2-4x^2+1=0$ 의 점근선의 방정식은 ______이고 두 점근선사이의 각들중에서 가장 작은것은 ______이며 준선의 방정식은 ______ , 두 준선사이의 거리는 ______ 이다.

12. 타원의 모임점사이의 거리의 절반이 모임점으로부터 대응하는 준선까지의 거리와 같으면 타원의 리심률은 ______이다.

13. 포물선 $y^2=-x$ 의 한 점 P로부터 모임점까지의 거리는 2이다.

그러면 점 P의 자리표는 ________이다.

14. 자리표축이 대칭축인 등변쌍곡선의 점근선의 방정식은 ______ , 리심률은 ______이다. 만일 모임점의 자리표가 (−3, 0)이면 이 쌍곡선의 실축의 길이는 ______ , 쌍곡선의 방정식은 ________이다.

15. 타원의 방정식이 $x^2+2y^2=4$ 이다. 그러면 모임점의 자리표는 _______ , 준선의 방정식은 __________이다. 만일 타원우의 한 점 P로부터 한 모임점까지의 거리가 1이면 P로부터 다른 모임점까지의 거리는 _______ , P로부터 두 준선까지의 거리는 각각 _________이다.

16. 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 우에서 오른쪽모임점까지의 거리가 $\frac{5}{2}$ 인 점의 자리표는 ______이고 이 점으로부터 오른쪽준선까지의 거리는 _____이다.

17. 중심이 원점에 있고 모임점이 자리표축에 있는 타원의 한 준선이 $x=4$ 이며 긴축의 한 끝점으로부터 가장 가까운 거리에 있는 모임점사이의 거리가 1이면 이 타원의 방정식은 _____, 리심률은 ______이다.

18. 한 타원의 중심이 자리표원점에 있고 모임점이 자리표축에 놓이며 짧은축의 길이가 6, 리심률이 0.8이면 이 타원의 방정식은 _____이다.

19. 중심이 원점에 있고 대칭축이 자리표축이며 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ 의 모임점이 정점이고 정점이 모임점인 쌍곡선의 방정식은 ______이다.

20. 쌍곡선 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=-1$ 의 정점이 모임점이고 정점이 원점에 있는 포물선의 방정식은 ______이다.

21. 중심이 원점에 있고 모임점이 x축에 있는 쌍곡선과 직선 $x-2y=0$이 두 점 A, B에서 사귀여 $AB=2\sqrt{15}$이다. 이 쌍곡선이 등변쌍곡선이면 그의 방정식은 ______이다.

22. 포물선 $y^2=2px$가 모임점 F를 지나며 그의 대칭축에 수직인 한 직선이 포물선과 두 점 A, B에서 사귄다. 만일 준선과 대칭축이 점 P에서 사귀면 $\angle APB=$________이다.

23. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$우의 가로자리표가 3인 점 P로부터 두 모임점까지의 거리가 각각 6.5, 3.5이다. 그러면 긴축의 길이는 ______, 짧은축의 길이는 ______이다.

24. 등변쌍곡선 $x^2-y^2=a^2$의 웃반평면에 있는 왼쪽가지우의 움직이는 한 점 P(정점이 아님)와 왼쪽모임점 F를 지나는 직선 PF의 변화률 K의 값범위는 ______ 이다.

25. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 모임점 F_1, F_2을 직경의 두 끝점으로 하는 원둘레와 타원이 사귐점을 가지지 않으면 타원의 리심률은 $e\in$ ______ $\subset(0,\ 1)$이며 원둘레와 타원이 4개의 사귐점을 가질 때 그 4개의 사귐점과 F_1, F_2을 정점으로 하는 6각형이 바른6각형이면 타원의 리심률 e는 ______이다.

답

1. ① 2. ③ 3. ② 4. ④ 5. ②

6. ② 7. ① 8. ① 9. ④ 10. ②

11. $y=\pm2x$, $\arctan\frac{4}{3}$ (또는 $\arctan\frac{1}{2}$), $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{10}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$

12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 13. $\left(-\frac{7}{4},\ \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ 또는 $\left(-\frac{7}{4},\ -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

14. $y=\pm x,\quad \sqrt{2},\quad 3\sqrt{2},\quad x^2-y^2=\frac{9}{2}$

15. $(\pm\sqrt{2},\ 0),\quad x=\pm 2\sqrt{2},\quad 3,\quad \sqrt{2}\ ,\quad 3\sqrt{2}$

16. $\left(-1,\ \pm\frac{3}{2}\right),\quad 5$

17. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\quad \frac{1}{2}$

18. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 또는 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

19. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$

20. $x^2=\pm 12y$

21. $x^2-y^2=9$

22. 90°

23. $10,\ 5\sqrt{3}$

24. $K\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ +\infty)$

25. $\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right),\quad \sqrt{3}-1$

3. 보조변수방정식

1) 보조변수방정식의 일반적개념

방정식 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ (ㄱ)

가 주어졌다고 하자. 여기서 $f(t)$와 $\varphi(t)$는 일정한 구간에서 변하는 변수 t에 관한 식이다.

식 (ㄱ)는 매 t의 값에 따라 수 쌍 $(x,\ y)$를 결정한다.

이 수 쌍 $(x,\ y)$를 자리표로 가지는 점 $M(x,\ y)$를 t가 결정하는 점이라고 부르자. 이제 t를 변화시키면 t가 결정하는 점 M은 변하면서 어떤 선 ℓ을 결정하게 될것이다.

이때 (ㄱ)를 선 ℓ의 보조변수방정식이라고 부르며 t를 선 ℓ의 보조변수라고 부른다.

주어진 선의 보조변수방정식을 작성하기 위해서는 우선 선의 보조변수를 정해야 한다.

변수 t가 있어서 t의 값이 결정되면 선의 점이 유일하게 결정되고 거꾸로 선의 점이 결정되면 t의 값이 유일하게 결정될 때 변수 t는 선의 보조변수로 된다.

선의 보조변수를 정한 다음에는 선의 움직이는 점 M의 자리표 x와 y를 각각 t에 의하여 표시하는 함수

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

를 구하면 이것이 주어진 선의 보조변수로 된다.

2) 몇가지 곡선의 보조변수방정식

① 직선의 보조변수방정식(그림 3−44)

점 $P_0(x_0,\ y_0)$을 지나며 경사각이 α인 직선 ℓ의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases} \quad (t\text{는 보조변수})$$

여기서 t의 곁수들의 2제곱의 합이 1인데 이때 직선의 보조변수방정식을 표준식이라고 부른다.

보조변수방정식에 들어있는 매개 량의 의미는 다음과 같다.

ㄱ. 직선 ℓ의 임의의 점을 P라고 할 때 t는 벡토르 $\overrightarrow{P_0P}$의 크기를 나타낸다. 즉 $|t| = \left|\overrightarrow{P_0P}\right|$

그림 3−44

ㄴ. 직선 ℓ의 P_0이 아닌 서로 다른 두 점을 P_1, P_2, 그에 대응하는 보조변수값을 t_1, t_2이라고 할 때 P_1와 P_2사이의 거리는 다음과 같다.

$$P_1P_2 = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2}$$

ㄷ. 점 M이 선분 P_1P_2의 가운데점일 때 점 M에 대응하는 보조변수값 t_m은 다음과 같다.

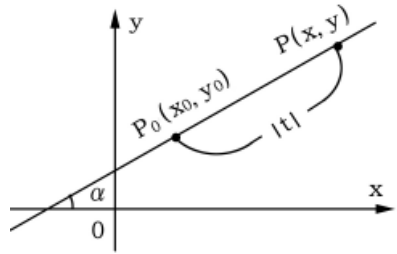
$$t_m = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

ㄹ. P_0이 P_1P_2의 가운데점이면 $t_1 + t_2 = 0$이다.

ㅁ. 방정식 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ (t는 보조변수)는 점 $P_0(x_0,\ y_0)$을 지나며 변화률이 $\frac{b}{a}$인 직선의 보조변수방정식을 나타낸다.

$a^2 + b^2 = 1$일 때에만 t의 의미는 앞에서와 같다.

직선 AB우의 임의의 점 P에 대하여 $\frac{AP}{PB} = \lambda$로 놓으면 직선 AB의 보조변수방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \quad (\lambda\text{는 보조변수})$$

여기서 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$이다.

② 원둘레의 보조변수방정식

ㄱ. 중심이 원점에 있고 반경이 R인 원둘레의 보조변수방정식

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\text{는 보조변수})$$

ㄴ. 중심이 $(x_0,\ y_0)$이고 반경이 R인 원둘레의 보조변수방정식

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\text{는 보조변수})$$

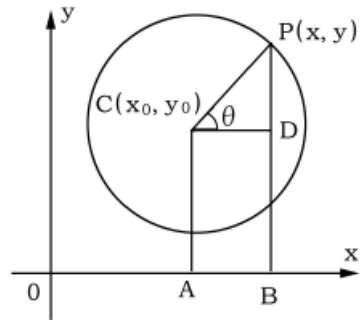



그림 3-45

그림 3-45에서 보는바와 같이

$BP - BD = R\sin\theta$, $OB - OA = R\cos\theta$

즉 $y - y_0 = R\sin\theta$, $x - x_0 = R\cos\theta$

$$\therefore \begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\text{는 보조변수})$$

보조변수 θ는 반경이 놓이는 직선과 x축의 정의 방향과 이루는 각이다.

③ 타원의 보조변수방정식

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$에 대하여 그림 3-46에서와 같이 타원의 긴반경, 짧은 반경을 각각 반경으로 하고 자리표원점을 중심으로 하는 두 원을 그리자.

타원의 임의의 점 p(x, y)에서

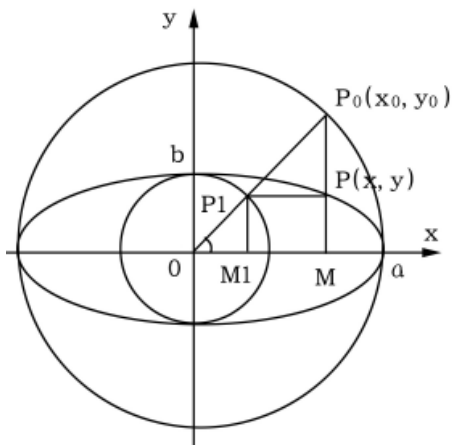



그림 3-46

x축에 그은 수직선이 x축과 사귀는 점을 M, 큰 원과 사귀는 점을 $P_0(x_0,\ y_0)$이라고 하면 분명히 $x_0 = x$이다.

$\angle P_0OM = \alpha$로 놓으면 $OM = OP_0\cos\alpha$ 즉 $x = a\cos\alpha$이다.

타원의 방정식에 이것을 갈아넣으면 $y = b\sin\alpha$이다.

OP_0이 작은 원과 사귀는 점을 $P_1(x_1,\ y_1)$, P_1에서 x축에 그은 수직선의 밑점을 M_1이라고 하면

$$P_1M_1 = y_1 = b\sin\alpha \qquad \therefore \quad y_1 = y \qquad P_1P \,//\, x\text{축}$$

그러므로 타원의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\sin\alpha \end{cases} \quad (\alpha\text{는 보조변수})$$

주의: 보조변수 α는 반직선 OP가 x축의 정의 방향과 이루는 각이 아니다.

P에서 x축, y축에 수직인 직선을 그었을 때 큰 원둘레, 작은 원둘레와 사귀는 점을 각각 P_0, P_1라고 할 때 세 점 O, P_0, P_1는 한직선에 놓이며 이때 OP_0이 x축의 정의 방향과 이루는 각이 α이다. 이 각을 리심각이라고 부른다.

중심이 $(x_0,\ y_0)$이고 긴 반경, 짧은 반경이 각각 a, b인 타원의 보조변수방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos\alpha \\ y = y_0 + b\sin\alpha \end{cases} \quad (\alpha\text{는 보조변수})$$

④ 쌍곡선의 보조변수방정식

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$에 대하여 $a > b$인 경우를 보자. (그림 3−47)

곡선의 임의의 한 점 $P(x,\ y)$에 대하여 P를 지나 x축에 평행인 직선과 점 A에서 작은 원에 그은 접선과의 사귐점을 Q, P에서 x축에 내린 수직선의 밑점을 M, 점 M을 지나 큰 원에 그은 접

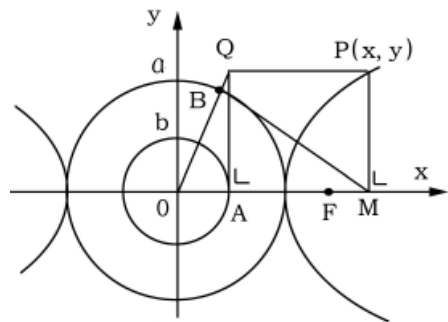



그림 3−47

선의 밑점을 B라고 하면 세 점 O, B, Q는 한 직선우에 놓인다. 그러므로 OQ와 x축의 정의 방향과 이루는 각을 φ라고 하면

$$OM = x = a\sec\varphi, \quad AQ = y = b\tan\varphi$$

∴ 쌍곡선의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x = a\sec\varphi \\ y = b\tan\varphi \end{cases} \quad (\varphi \text{는 보조변수})$$

중심이 (x_0, y_0)에 있는 쌍곡선의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x = x_0 + a\sec\varphi \\ y = y_0 + b\tan\varphi \end{cases} \quad (\varphi \text{는 보조변수})$$

주의: 보조변수 φ는 쌍곡선의 임의의 점 P와 자리표원점을 지나는 직선이 x축의 정의 방향과 이루는 각이 아니다.

쌍곡선의 보조변수방정식에서 보조변수 φ의 값범위는

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}\right)$$

쌍곡선에서도 이 각 φ를 리심각이라고 부른다.

⑤ 보조변수방정식과 일반방정식

ㄱ. 일반방정식을 보조변수방정식으로 바꾸기

일반방정식을 보조변수방정식으로 바꾸자면 먼저 보조변수를 선택하여야 한다.

보조변수의 선택은 문제의 특성에 따라 여러가지로 할수 있는데 일반적으로 각(중심각, 리심각, 직선의 경사각, …), 변화률 K, 어떤 선분의 길이, 활등의 길이, 어떤 점의 가로자리표 또는 세로자리표 등을 보조변수로 취한다.

[례] 방정식 $x^2 + y^2 - 2x = 0$을 보조변수방정식으로 바꾸어라.

첫째 방법: 곡선의 원점 (0, 0)을 지나는데 (0, 0)은 일정한 점이므로 이 점을 지나는 직선 $y = kx$를 생각하고 이 직선의 변화률 K를 보조변수로 잡자. K의 서로 다른 값에 서로 다른 점(원점이 아닌)이 대응하므로

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = kx \end{cases} \Rightarrow (1+k^2)x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = \frac{2}{1+k^2}$$

여기로부터 $y=\dfrac{2k}{1+k^2}$

그리하여 주어진 곡선의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{1+k^2} \\ y=\dfrac{2k}{1+k^2} \end{cases} \quad (k \text{ 는 보조변수})$$

둘째 방법: 주어진 방정식을 변형하면 $(x-1)^2+y^2=1$인데 이것은 원둘레를 나타낸다. 곡선의 임의의 점과 원의 중심을 맺는 선이 x축의 정의 방향과 이루는 각 θ를 보조변수로 정하면

$$\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 는 보조변수})$$

여기서 보는바와 같이 보조변수를 어떻게 취하는가에 따라 보조변수방정식의 형태도 달라진다.

보조변수를 취할 때 다음의것에 주의를 돌려야 한다.

첫째로, 보조변수 t를 취하였을 때 $x=f(t)$로 표시되면 $f(t)$의 값구역이 일반방정식에서 x의 값구역과 일치하여야 한다.

실례로 $xy=1$을 보조변수방정식으로 고칠 때 정확한 방법은 다음과 같다.

삼각늘같기식 $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1(\alpha\neq\dfrac{1}{2}k\pi,\ \ k\in I)$을 리용하고 $x=\tan\alpha$로 놓을 때 $y=\cot\alpha$로 된다.

따라서 $$\begin{cases} x=\tan\alpha \\ y=\cot\alpha \end{cases} \quad (\alpha\neq\frac{1}{2}k\pi,\quad k\in I)$$

는 보조변수방정식으로 된다. 여기서 α는 보조변수이다.

만일 $\sin\alpha\cdot\cos ec\alpha=1$로부터 $x=\sin\alpha$로 놓으면

$$\begin{cases} x=\sin\alpha \\ y=\cos ec\alpha \end{cases}$$ (α는 보조변수)를 얻는데 여기서 $|x|\leq 1$이다.

그런데 $xy=1$에서 x는 령 아닌 모든 실수값을 취한다.

그러므로 우의 방정식은 주어진 방정식의 보조변수방정식이 아니다.

둘째로, 보조변수를 선택한 후에 $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$를 만드는데 $f(t)$, $\varphi(t)$를 간단하게 하여야 한다.

ㄴ. 보조변수방정식을 일반방정식으로 바꾸기

보조변수방정식을 일반방정식으로 고치는데서 기본은 보조변수를 없애는것이다.

즉 x, y에 관한 관계식을 만드는것이다. 보조변수소거법에는 대수적소거법과 삼각소거법이 있다.

[례1] $\begin{cases} x=2t^2 \\ y=-1-t^2 \end{cases}$ (t는 보조변수)을 일반방정식으로 고쳐라.

(설명) 대수적소거법을 리용하자.

$y=-1-t^2$으로부터 $t^2=-y-1$을 얻는다.

이것을 첫 식에 갈아넣으면 $x=2(-y-1)$

따라서 일반방정식은 $x+2y+2=0$이다.

그런데 보조변수방정식에서 $x=2t^2 \geq 0$이므로 일반방정식은

$$x+2y+2=0 \quad (x \geq 0)$$

[례2] $\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=1+\cos\theta \end{cases}$ (θ는 보조변수)를 일반방정식으로 고쳐라.

(설명) 삼각소거법을 리용하자.

$$\begin{cases} \sin^2\theta = x^2 \\ \cos^2\theta = (y-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+(y-1)^2=1$$

$|\sin\theta| \leq 1$ 즉 $|x| \leq 1$이므로 일반방정식은

$$x^2+(y-1)^2=1 \quad (|x| \leq 1)$$

3) 문제풀이의 묘리

보조변수방정식을 일반방정식으로 바꾸기문제

[례1] $\begin{cases} x=\dfrac{2at^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2at^2}{1+t^2} \end{cases}$ (t는 보조변수)

(설명) 두 식을 변끼리 나누면 $\dfrac{y}{x}=t$

이 식을 첫 식에 갈아넣으면

$$x=\frac{2a\cdot\dfrac{y^2}{x^2}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\frac{2ay^2}{x^2+y^2}$$

즉 $x(x^2+y^2)=2ay^2$

[례2] $\begin{cases} x=\dfrac{2a-1}{a+1} & ㄱ) \\ y=\dfrac{3a}{a+1} & ㄴ) \end{cases}$ (a는 보조변수)

(설명) $\begin{cases} x=\dfrac{2(a+1)-3}{a+1}=2-\dfrac{3}{a+1} & ㄱ) \\ y=\dfrac{3(a+1)-3}{a+1}=3-\dfrac{3}{a+1} & ㄴ) \end{cases}$ (a는 보조변수)

(ㄱ)−(ㄴ) $x-y=-1$

즉 $x-y+1=0$

그런데 (ㄱ), (ㄴ)로부터 $x\neq 2,\ y\neq 3$

그러므로 보조변수방정식은 $x-y+1=0$ (점 (2, 3)은 제외)

[례3] $\begin{cases} x=-\dfrac{8t}{t^2+4} & ㄱ) \\ y=\dfrac{16-4t^2}{t^2+4} & ㄴ) \end{cases}$ (t는 보조변수)

(설명) 두 식의 량변을 각각 두제곱하면

$$\begin{cases} x^2 = -\dfrac{64t^2}{\left(t^2+4\right)^2} \\ y^2 = \dfrac{16(4-t^2)^2}{\left(t^2+4\right)^2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = \frac{16t^2}{\left(t^2+4\right)^2} + \frac{(4-t^2)^2}{\left(t^2+4\right)^2} = 1$$

∴ 일반방정식은 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

직선의 보조변수방정식의 응용문제

[례1] 점 $\mathrm{P}_0(2,\ 1)$ 를 지나는 직선의 보조변수방정식 $\ell_1 : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \end{cases}$ (t 는 보조변수)가 주어졌다. 이 직선과 직선 $\ell_2 : 2x + y - 1 = 0$ 과의 사귐점 P와 P_0사이의 거리를 구하여라.

(설명) $x = 2-t,\ y = 1+t$ 를 방정식 $2x + y - 1 = 0$ 에 갈아넣으면 t =4이고 따라서 두 직선의 사귐점은 P(−2, 5)이다.

따라서 $\mathrm{PP}_0 = 4\sqrt{2}$

[례2] 직선의 방정식이 다음과 같이 주어졌다.

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$$

(t 는 보조변수)이 직선과 포물선 $y^2 = 4x$ 와의 사귐점의 자리표를 구하여라.

(설명) $x = 1 + \dfrac{1}{2}t,\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t$ 를 $y^2 = 4x$ 에 갈아넣으면 $t_1 = -\dfrac{4}{3},\quad t_2 = 4$ 를 얻는다. 이것을 보조방정식에 갈아넣으면

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad 또는 \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

따라서 사귐점의 자리표는 $\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $(3,\ 2\sqrt{3})$

[례3] 직선 $\ell : \begin{cases} x = -1 + \dfrac{3}{5}t \\ y = 2 - \dfrac{4}{5}t \end{cases}$ (t는 보조변수)과 쌍곡선 $(y-2)^2 - x^2 = 1$이 두 점 A, B에서 사귄다. 활줄 AB의 가운데점 M의 자리표를 구하여라.

(설명) $x = -1 + \dfrac{3}{5}t,\ y = 2 - \dfrac{4}{5}t$를 쌍곡선의 방정식에 갈아넣으면 $7t^2 + 30t - 50 = 0$을 얻는다.

∴ AB의 가운데점 M의 보조변수값은 $t_{\mathrm{M}} = \dfrac{t_1 + t_2}{2} = -\dfrac{15}{7}$

이것을 직선의 방정식에 갈아넣으면 $x_{\mathrm{M}} = -2\dfrac{2}{7},\ y_M = 3\dfrac{5}{7}$

따라서 점 M의 자리표는 $\left(-2\dfrac{2}{7},\ 3\dfrac{5}{7}\right)$

직선과 원뿔곡선의 자리관계 판정

직선의 보조변수방정식 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ (t는 보조변수)와 원뿔곡선의 방정식이 주어졌을 때 $x = f(t),\ y = \varphi(t)$를 원뿔곡선의 방정식에 갈아넣어 t에 관한 한변수2차방정식을 만든다.

만일 D＞0이면 직선과 곡선은 사귀며 D＝0일 때 직선과 곡선은 접하며(사귀는 경우도 있다.) D＜0일 때 직선과 곡선은 서로 떨어져있다.

[례] 점 (1, 2)를 지나며 경사각이 $30°$인 직선 ℓ과 원둘레

$x^2+y^2-2x+4y-3=0$의 자리관계를 판정하여라.

(설명) 직선 ℓ의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x=1+t\cos 30=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=2+t\sin 30=2+\dfrac{1}{2}t \end{cases} \quad (t\text{는 보조변수})$$

이 식을 원둘레의 방정식에 갈아넣고 정돈하면 다음의 식을 얻게 된다.

$t^2+4t+8=0$ 을 얻는다.

D=16－32＜0이므로 직선과 원둘레는 서로 떨어져있다.

직선과 원뿔곡선에 의하여 생기는 활줄에 관한 문제

[례] 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 모임점 F를 지나며 경사각이 $\dfrac{3}{4}\pi$인 직선에 의하여 생기는 포물선의 활줄 AB를 구하여라.

(설명) $y^2=4px\ (p>0)$의 모임점은 F(p, o)이므로 직선의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x=p+t\cos\dfrac{3}{4}\pi=p-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=0+t\sin\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t\text{는 보조변수})$$

이것을 $y^2=4px\ (p>0)$에 갈아넣고 정돈하면

$$t^2+4\sqrt{2}pt-8p^2=0$$

$D=(4\sqrt{2}p)^2-4(-8p^2)=64p^2>0$이므로 방정식은 두개의 실수풀이 t_1, t_2를 가진다.

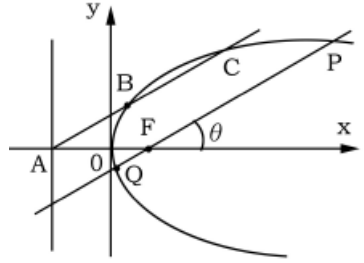
따라서 $t_1+t_2=-4\sqrt{2}p,\quad t_1t_2=-8p^2$

$$\therefore\quad AB=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=$$

$$=\sqrt{(-4\sqrt{2}p)^2-4(-8p)^2}=\sqrt{32p^2+32p^2}=8p$$

직선의 보조변수방정식을 리용하여 원뿔곡선의 어떤 성질을 증명하기문제

그림 3-48

［례］ 포물선의 대칭축과 준선이 점 A에서 사귄다. A를 지나는 가름선이 포물선과 사귀는 점을 B, C라고 하고 포물선의 모임점 F를 지나며 BC에 평행인 직선이 포물선과 사귀는 점을 P, Q라고 하면 $AB\cdot AC=QF\cdot FP$임을 증명하여라. (그림 3-48)

(설명) 포물선의 방정식을 $y^2=2ax\ (a>0)$로 놓으면 $A\left(-\frac{a}{2},\ 0\right)$이다.

가름선 ABC의 경사각을 θ로 놓으면 직선 AC의 방정식은

$$\begin{cases} x=-\frac{a}{2}+t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases} \quad (t\text{는 보조변수})$$

$y^2=2ax$에 갈아넣으면

$$t^2\sin^2\theta-2at\cos\theta+a^2=0$$

$$AB\cdot AC=t_1\cdot t_2=\frac{a^2}{\sin^2\theta}$$

또한 $F\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$이므로 F를 지나며 가름선 ABC에 평행인 직선의 방정식은

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+t'\cos\theta \\ y=t'\sin\theta \end{cases} \quad (t'\text{는 보조변수})$$

이것을 $y^2=2ax$에 갈아넣으면

$$\sin^2\theta\,(t')^2-2at'\cos\theta-a^2=0$$

따라서 $FQ\cdot FP=\left|t_1'\cdot t_2'\right|=\left|\frac{-a^2}{\sin^2\theta}\right|$

그러므로 $QF \cdot FP = \dfrac{a^2}{\sin^2\theta}$

$$AB \cdot AC = FQ \cdot FP$$

원뿔곡선의 보조변수방정식의 응용문제

［례 1］ 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 우에 한 점 P가 있다. 점 P가 1사분구에 있을 때 타원이 자리표축과 정의방향쪽에서 사귀는 점을 각각 A, B라고 하자. 네 점 A, P, B, O를 정점으로 하는 4각형 OAPB의 면적의 최대값, 최소값은 얼마인가?(그림 3－49)

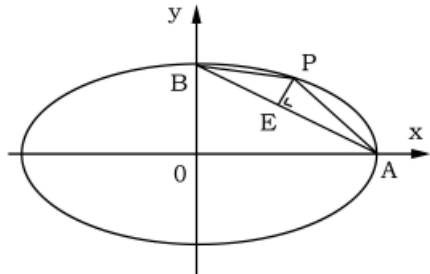



그림 3－49

(설명) 타원의 방정식은

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$$ (θ는 보조변수)로 놓으면 점 P의 자리표는

$(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$이고 직선 AB의 방정식은 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$

이므로 P로부터 AB까지의 거리는

$$d=\frac{|6\cos\theta+6\sin\theta-6|}{\sqrt{4+9}}=\frac{6\left|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-1\right|}{\sqrt{13}}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$$d_{\max}=\frac{6\left|\sqrt{2}-1\right|}{\sqrt{13}}=\frac{6}{\sqrt{13}}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

이때 점 P의 자리표는 $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$

$$S_{0APB}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{6}{\sqrt{13}}\left(\sqrt{2}-1\right)=$$
$$=3+3\left(\sqrt{2}-1\right)=3\sqrt{2}$$

따라서 S_{0APB}의 최대값은 $3\sqrt{2}$이다.

[례 2] 포물선 $y^2=4x$의 내접3각형의 한 정점은 자리표원점이다. 그리고 그의 수심은 포물선의 모임점을 지난다. 이 내접3각형의 둘레의 길이를 구하여라. (그림 3－50)

(설명) $y^2=4x$의 모임점은 F(1, 0)이다.

점 A의 자리표를 $(4t^2,\ 4t)$로 놓자.

t는 보조변수이고 $t>0$이다. 그러면 B의 자리표는 $(4t^2,\ 4t)$이다.

그림 3－50

AF의 변화률은 $K_{AF}=\frac{4t}{4t^2-1}$

OB의 변화률은 $K_{OB}=-\frac{4t}{4t^2}=-\frac{1}{t}$

AF⊥OB이므로 $K_{AF}\cdot K_{OB}=-1$,

즉 $\frac{4t}{4t^2-1}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)=-1$

따라서 $t^2=\frac{5}{4},\ t=\frac{\sqrt{5}}{2}$이며 점 A의 자리표는 $\left(5,\ 2\sqrt{5}\right)$이다.

그러므로

$AB=4\sqrt{5},\ \ OA=\sqrt{25+20}=3\sqrt{5}$

따라서 △OAB의 둘레의 길이는

$$AB+2OA=10\sqrt{5}$$

[례 3] 곡선 $x^2+y^2=9\ \ (x>0,\ y>0)$이 주어졌다. 점 A가 곡선을 따라 움직

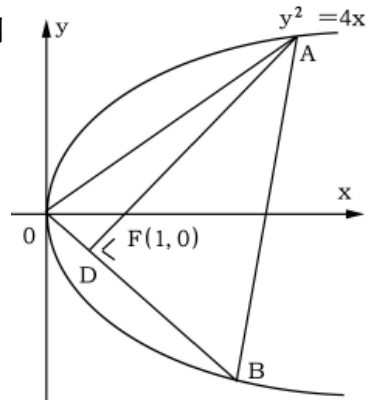
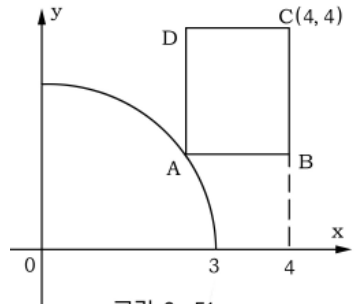



그림 3－51

이고 점 C의 자리표는 (4, 4)이다. AC를 대각선으로 하는 직4각형 ABCD에서 AB, AD는 각각 x축, y축에 평행이다. 직4각형 ABCD의 면적이 최소일 때 점 A의 자리표 및 그때의 최소면적을 구하여라. (그림 3－51)

(설명) 원둘레의 방정식을

$\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = 3\sin\alpha \end{cases}$ (α는 보조변수) $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓자.

$A(3\cos\alpha, 3\sin\alpha)$, $B(4, 3\sin\alpha)$, $D(3\cos\alpha, 4)$이므로

$S_{ABCD} = AB \cdot AD = (4-3\cos\alpha)(4-3\sin\alpha) =$

$= 16 - 12\cos\alpha - 12\sin\alpha + 9\sin\alpha\cos\alpha =$

$= 16 - 12(\cos\alpha + \sin\alpha) + \dfrac{9}{2}\sin 2\alpha$

$\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$이므로 $\sin\alpha + \cos\alpha = a$로 놓으면

$a \in (1, \sqrt{2})$

량변을 두제곱하면 $\sin 2\alpha = a^2 - 1$

이것을 웃식에 갈아넣으면

$$S_{ABCD} = 16 - 12a + \frac{9}{2}(a^2 - 1) = \frac{9}{2}a^2 - 12a + \frac{23}{2} = \frac{9}{2}\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{7}{2}$$

$a = \dfrac{4}{3}$일 때 S_{ABCD}의 최소값은 $\dfrac{7}{2}$이다.

이때 $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{4}{3}$, $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{7}{18}$

따라서 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$는 방정식 $x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{7}{18} = 0$의 두 풀이이다.

즉 $18x^2 - 24x + 7 = 0$의 두 풀이이다.

이때 $x = \dfrac{24 \pm \sqrt{24^2 - 28 \cdot 18}}{36} = \dfrac{4 \pm \sqrt{2}}{6}$

그러므로 점 A의 자리표는

$$\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2},\ \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 또는 } \left(\frac{4-\sqrt{2}}{2},\ \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$$

련습문제

1. 보조변수방정식 $\begin{cases} x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases}$ (t는 보조변수)을 일반방정식으로 고친것은 ( )이다.

① $x^2+y^2=1$ ② $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

③ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ④ $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

2. 아래의 매 번호에 들어있는 두 방정식이 동일한 곡선을 나타내는 것은 ( )이다.

① $\begin{cases} x=\sin\varphi \\ y=2\sin\varphi+1 \end{cases}$ (φ는 보조변수)와 $y=2x+1$

② $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt{-t} \end{cases}$ (t는 보조변수)와 $x^2+y^2=0$

③ $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}t+1 \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}t-2 \end{cases}$ 와 $\begin{cases} x=1+(\sqrt{2}-\sqrt{6})t \\ y=-2+(\sqrt{2}+\sqrt{6})t \end{cases}$

④ $\begin{cases} x=a\sec\theta \\ y=b\tan\theta \end{cases}$ $(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, θ는 보조변수)와 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

3. 보조변수방정식 $\begin{cases} x=\dfrac{-36t}{4+9t^2} \\ y=\dfrac{8-18t^2}{4+9t^2} \end{cases}$ (t는 보조변수)이 나타내는 곡선은 (   )이다.

① 타원 ② 쌍곡선 ③ 직선 ④ 원

4. 직선 $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \end{cases}$ (t는 보조변수)의 경사각은 (   )이다.

① $\arctan\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ ② $-\arctan\dfrac{3}{2}$

③ $\pi-\arctan\dfrac{3}{2}$ ④ $\pi-\arctan\dfrac{2}{3}$

5. 직선 $\begin{cases} x=-2-\sqrt{2}t \\ y=3+\sqrt{2}t \end{cases}$ (t는 보조변수)우의 한 점으로부터 점 A(−2, 3)까지의 거리가 $\sqrt{2}$인 점의 자리표는 (   )이다.

① (−4, 5) ② (−3, 4)

③ (−4, 5) 또는 (0, 1) ④ (−3, 4) 또는 (−1, 2)

6. 보조변수 θ가 련속적으로 변할 때 점 $P(2\cos\theta, 3\sin\theta)$의 자리길은 곡선 P이다. 아래의 점들가운데서 곡선 P에 놓이지 않는것은 (   )이다.

① (2, 3) ② (0, −3) ③ $\left(\sqrt{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ ④ $\left(1, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

7. 직선의 보조변수방정식 $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ (t는 보조변수)가 주어졌다. 점 $P_0(x_0, y_0)$으로부터 움직이는 점 $P(x_0+at, y_0+bt)$까지의 거리는 (   )이다.

① $|t|$ ② t ③ $\dfrac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ④ $\sqrt{a^2+b^2}t$

8. 점 P(2, −1)을 지나며 변화률이 −1인 직선의 보조변수방정식은 ________이다.

9. M(2, −5)를 중심으로 하고 긴축이 x축에 평행이며 긴축이 8, 짧은 축이 6인 타원의 보조변수방정식은 ________이다.

10. P(2, −1)을 중심으로 하고 실축이 x축에 평행이며 실축이 4, 허축이 2인 쌍곡선의 보조변수방정식은 ________이다.

11. 원점으로부터 나가는 직선의 경사각 θ를 보조변수로 할 때 원둘레 $x^2+y^2-2x=0$의 보조변수방정식은 ________이다.

12. 보조변수방정식 $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$는 ________이 보조변수일 때 직선을 나타내며 이때 직선은 ________을 지나며 변화률은 ________ 그리고 a, b가 ________를 만족시킬 때 t는 벡토르의 길이를 나타낸다.

13. $\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{1+t}{1+t^2} \end{cases}$ (t는 보조변수) 보조변수방정식을 일반방정식으로 고쳐라.

14. $\begin{cases} x=\cos\theta+\sin\theta \\ y=\sin\theta\cdot\cos\theta \end{cases}$ (θ는 보조변수) 보조변수방정식을 일반방정식으로 고쳐라.

15. $\begin{cases} x=\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} \\ y=\dfrac{\cos\varphi}{1-\cos\varphi} \end{cases}$ ($0<\varphi<2\pi$, φ 는 보조변수) 보조변수방정식을 일반방정식으로 고쳐라.

16. $\begin{cases} x = 2\sin\theta \\ y = 2 + \cos 2\theta \end{cases}$ (θ는 보조변수) 보조변수방정식을 일반방정식으로 고쳐라.

17. $\begin{cases} x = \dfrac{24t}{t^2+9} \\ y = \dfrac{27-3t^2}{t^2+9} \end{cases}$ (t는 보조변수) 보조변수방정식을 일반방정식으로 고쳐라.

18. 점 P(5, −3)을 지나며 경사각이 $\pi - \arctan\dfrac{4}{3}$인 직선과 원둘레 $x^2 + y^2 = 25$와의 사귐점을 A, B라고 할 때 다음것을 구하여라.

1) PA · PB 2) 활줄 AB의 가운데점의 자리표

19. 타원 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$의 한 점을 P라고 할 때 타원의 오른쪽 정점 A를 지나 OP에 평행인 직선이 y축과 R에서, 타원과 Q에서 사귄다고 하자. 이때 $\dfrac{\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AR}}{\mathrm{OP}^2}$의 값을 구하여라.

20. 포물선 $y^2 = 4x$의 정점 O를 지나며 서로 수직인 두 가름선이 각각 포물선과 A, B에서 사귄다.

1) 활줄 AB는 포물선의 대칭축과 일정한 점에서 사귄다는것을 증명하여라.

2) 활줄 AB의 자리길방정식을 구하여라.

답

1. ③ 2. ② 3. ① 4. ③ 5. ④

6. ① 7. ④ 8. $\begin{cases} x = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t는 보조변수)

9. $\begin{cases} x = 2 + 4\cos\theta \\ y = -5 + 3\sin\theta \end{cases}$ (t는 보조변수)

10. $\begin{cases} x = 2 + 2\sec\varphi \\ y = -1 + \tan\varphi \end{cases}$ (t는 보조변수)

11. $\begin{cases} x = 1 + \cos 2\theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases}$ (t는 보조변수)

12. t, (x_0, y_0), $\frac{b}{a}$, $a^2 + b^2 = 1$

13. 두 식을 서로 나누면 $\frac{x}{y} = \frac{1-t}{1+t}$, $t = \frac{y-x}{y+x}$를 얻고 이것을 첫 식에 갈아넣고 정돈하면 $x^2 + y^2 - x - y = 0$을 얻는다.

14. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ $\left(-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\right)$　　15. $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)$

16. $x^2 = -2(y-3)$, $x \in [-2, 2]$　　17. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

18. $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$, $\alpha \in (0, \pi)$이므로 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

따라서 직선의 보조변수방정식은 $\begin{cases} x = 5 - \frac{3}{5}t \\ y = -3 + \frac{4}{5}t \end{cases}$ (t는 보조변수)

이것을 원둘레의 방정식에 갈아넣고 정돈하면 $5t^2 - 54t + 45 = 0$

즉 $t_1 + t_2 = \frac{54}{5}$, $t_1 \cdot t_2 = 9$

1) $\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = |t_1| \cdot |t_2| = |t_1 \cdot t_2| = 9$

2) 활줄 AB의 가운데점을 M이라고 하면 M에 대응하는 보조변수는

$$t_{\mathrm{M}} = \frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{27}{5}$$

이것을 보조변수방정식에 갈아넣어 $\mathrm{M}\left(\frac{44}{25}, \frac{33}{25}\right)$을 얻는다.

19. (그림 3—52) 점 A를 지나는 직선의 방정식을 $y=\mathrm{K}(x-a)$로 놓자.

$$\begin{cases} y=\mathrm{K}(x-a) \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{AQ}=\frac{2ab^2\sqrt{1+\mathrm{K}^2}}{b^2+a^2\mathrm{K}^2}$$

$$\begin{cases} y=\mathrm{K}(x-a) \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{R}(0,\ -ka) \qquad \therefore\ \mathrm{AR}=a\sqrt{1+k^2}$$

$$\begin{cases} y=kx \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{OP}=\sqrt{\frac{a^2b^2(1+k^2)}{b^2+a^2k^2}}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AR}}{\mathrm{OP}^2}=2$$

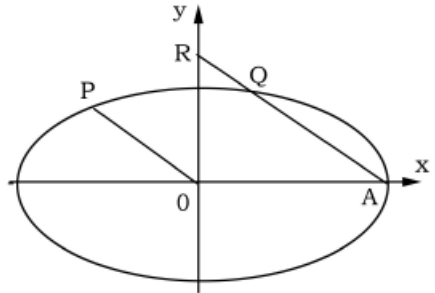



그림 3—52

20. (그림 3—53)

$\mathrm{A}(t_1^2,\ 2t_1)$, $\mathrm{B}(t_2^2,\ 2t_2)$이라고 하자.

OA⊥OB이므로 $\mathrm{K}_{\mathrm{OA}}\cdot\mathrm{K}_{\mathrm{OB}}=-1$

즉 $\frac{2}{t_1}\cdot\frac{2}{t_2}=-1,\quad t_1\cdot t_2=-4$

1) $\mathrm{K}_{\mathrm{AB}}=\frac{2(t_1-t_2)}{t_1^2-t_2^2}=\frac{2}{t_1+t_2}$

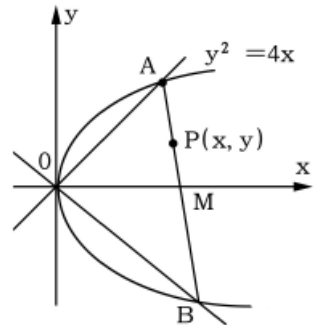
∴ 직선 AB의 방정식은

$$y-2t_1=\frac{2}{t_1+t_2}(x-t_1^2)$$

$$\begin{cases} y-2t_1=\frac{2}{t_1+t_2}(x-t_1^2) \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-t_1t_2=4$$

그림 3—53

즉 활줄 AB와 x축은 일정한 점 M(4, 0)에서 사귄다.

2) AB의 가운데점을 $P(x,\ y)$라고 하면 $\begin{cases} x = \dfrac{t_1^2 + t_2^2}{2} \\ y = \dfrac{2t_1 + 2t_2}{2} = t_1 + t_2 \end{cases}$

둘째 식으로부터 $y^2 = t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2$을 얻는다.
$t_1 t_2 = -4$ 및 첫 식을 둘째 식에 갈아넣으면

$$y^2 = 2x - 8$$

즉 AB의 가운데점의 자리길방정식은

$$y^2 = 2(x-4)$$

4. 극자리표계와 극방정식

1) 극자리표계

평면에 한 점 O와 이 점을 지나는 축이 결정되면 평면에는 극자리표계가 정해졌다고 말한다. 이때 O를 극점, 극점을 지나는 축을 극축이라고 부른다. 극자리표계가 정해진 평면의 점 M에 대하여 O로부터 점 M까지의 거리 r를 점 M의 극반경, 극축 x와 반직선 OM사이의 각 $\varphi\ (0 \le \varphi < 2\pi)$ 를 점 M의 극각이라고 부르며 두 수의 렬 $(r,\ \varphi)$를 점 M의 극자리표라고 부르며 M $(r,\ \varphi)$로 표시한다. (그림 3—54)

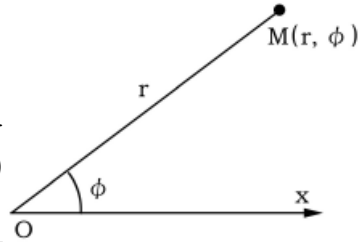



그림 3−54

2) 극자리표와 직각자리표사이의 관계

극축을 x축으로, 극점을 자리표원점으로 하는 직각자리표계를 정하고 어떤 점 M의 직각자리표를 (x, y), 극자리표를 (r, φ)라고 하면

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

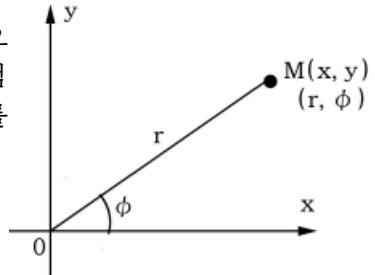



그림 3−55

극점을 직각자리표계의 원점에 놓지 않고 생각하면 우의 식은 달라진다. (그림 3—55)

3) 극자리표계에서의 기본관계식

ㄱ. 대칭문제

점 M(r, φ)의

· 극점에 관한 대칭점은 $M'\left(r,\ \pi+\varphi\right)$

· 극축에 관한 대칭점은 $M''\left(r, -\varphi\right)$

· 직선 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$에 관한 대칭점은 $M'''\left(r,\ \pi-\theta\right)$

ㄴ. 두 점사이의 거리

$A\left(r_1,\ \varphi_1\right)$, $B\left(r_2,\ \varphi_2\right)$일 때

$$AB=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)}$$

ㄷ. 3각형의 면적

· 극점이 3각형의 한 점일 때

$$S_{\Delta AOB}=\left|\frac{1}{2}r_1r_2\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)\right|$$

· $A(r_1,\ \varphi_1)$, $B(r_2,\ \varphi_2)$, $C(r_3,\ \varphi_3)$일 때

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}-S_{\Delta AOC}$$

ㄹ. 세 점이 한 직선에 놓이기 위한 필요충분조건

$$r_1r_2\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+r_2r_3\sin\left(\varphi_2-\varphi_3\right)+r_3r_1\sin\left(\varphi_3-\varphi_1\right)=0$$

4) 도형의 극방정식

$f\left(r,\ \varphi\right)=0$이 변수 r와 φ에 관한 두변수방정식이라고 하자.

주어진 선 ℓ우의 매 점의 극자리표 $(r,\ \varphi)$가 $f(r,\ \varphi)$를 만족시키고 거꾸로 $f\left(r,\ \varphi\right)=0$을 만족시키는 $(r,\ \varphi)$를 자리표로 가지는 점이 선 ℓ우에 놓인다면 $f\left(r,\ \varphi\right)=0$을 선 ℓ의 극방정식이라고 부른다.

ㄱ. 직선

① 극점을 지나며 극축과 φ의 각을 이루는 직선: $\theta=\varphi\left(r\in R\right)$

($\theta=\varphi\left(r\geq0\right)$는 극점을 지나며 극축과 α의 각을 이루는 반직선을 나타낸다.)(그림 3－56 ①)

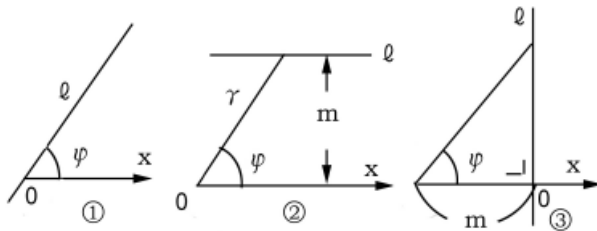



그림 3－56

② 극축에 평행이며 극축과의 거리가 m인 직선: $r\sin\varphi = m$ (그림 3－56 ②)

③ 극축에 수직이고 극점으로부터의 거리가 m인 직선: $r\cos\varphi = m$ (그림 3－56 ③)

ㄴ. 원둘레

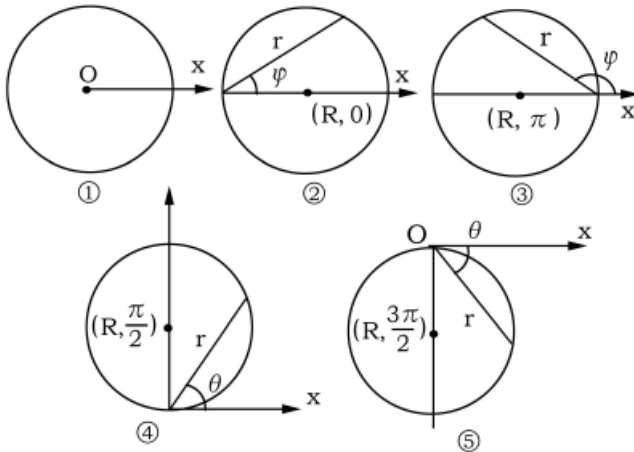



그림 3－57

① 원의 중심이 극점에 있고 반경이 R (R>0)인 원: r＝R (그림 3－57 ①)

② 극점을 지나며 중심이 (R, 0) (R>0)인 원: $r = 2R\cos\varphi$ (그림 3－57 ②)

③ 극점을 지나며 중심이 (R, π) (R>0)인 원: $r = -2R\cos\varphi$ (그림 3－57 ③)

④ 극점을 지나며 중심이 $\left(R, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (R>0)인 원: $r = 2R\sin\varphi$ (그림 3－57 ④)

⑤ 극점을 지나며 중심이 $\left(R,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ (R>0)인 원: $r=-2R\sin\varphi$ (그림 3−57 ⑤)

ㄷ. 원뿔곡선

모임점을 극점으로 하고 모임점을 지나 준선에 수직인 축(방향이 모임점에 관하여 준선과 반대쪽으로 향하는)을 극축으로 하는 극자리표계에서 원뿔곡선의 극방정식은 다음과 같다. (그림 3−58)

$$r=\frac{eP}{1-e\cos\varphi}$$

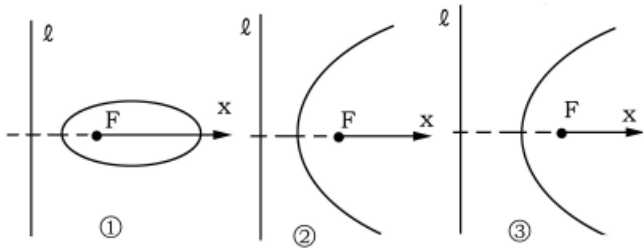



그림 3−58

[례] 극방정식 $r=\frac{7}{4-3\cos\varphi}$은 어떤 곡선을 표시하는가? 표준방정식으로 고쳐라.

(풀이) 주어진 극방정식을 변형하면 $r=\frac{\frac{7}{4}}{1-\frac{3}{4}\cos\varphi}$이므로 이 방정식은 리심률이 $e=\frac{3}{4}$인 타원의 극방정식이다.

$e\mathrm{P}=\frac{7}{4}$ 이므로 $\mathrm{P}=\frac{7}{3}$

$$\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{4} \\ P=\dfrac{a^2}{c}-c=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=16 \\ c=3 \end{cases},\quad b^2=a^2-c^2=7$$

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

자리표원점을 극점으로, x축을 극축으로 할 때 우의 타원의 표준방

정식을 극방정식으로 고치자.

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ 를 갈아넣으면

$$7r^2\cos^2\varphi + 16r^2\sin^2\varphi = 112$$

따라서 $r^2 = \dfrac{112}{7\cos^2\varphi + 16\sin^2\varphi}$

이것은 극자리표계를 어떻게 정하는가에 따라 극방정식의 모양이 달라진다는것을 보여준다.

5) 문제풀이의 묘리

모임점을 지나는 활줄에 관한 문제

[례1] 포물선 $y^2 = 4x$ 의 모임점을 지나며 경사각이 $\arctan\dfrac{3}{2}$ 인 직선이 포물선과 두 점 A, B에서 사귄다. 선분 AB의 길이를 구하여라.

(설명) 포물선의 모임점을 극점, x축을 극축으로 하는 극자리표계에서 $y^2 = 4x$ 의 극방정식은 $r = \dfrac{2}{1-\cos\varphi}$

$A(r_1, \varphi_1)$, $B(r_2, \pi + \theta_1)$로 놓으면 $\tan\varphi_1 = \dfrac{3}{2}$ 이므로

$$AB = r_1 + r_2 = \frac{2}{1-\cos\varphi_1} + \frac{2}{1+\cos\varphi_1} = \frac{4}{\sin^2\varphi_1} = \frac{52}{9}$$

즉 선분 AB의 길이는 $\dfrac{52}{9}$ 이다.

[례2] 타원 $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$ 의 오른쪽 모임점을 지나며 경사각이 $\dfrac{\pi}{6}$ 인 직선이 타원과 사귀는 점을 A, B라고 할 때 선분 AB의 길이를 구하여라.

(설명) 방정식을 변형하면 $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{1} = 1$

$x' = x - 1$, $y' = y + 2$ 로 놓으면 $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$ (ㄱ)

타원의 왼쪽 모임점을 극점, $O'x'$축을 극축으로 하는 극자리표계에서 $a^2=4$, $b^2=1$이므로

$$c=\sqrt{3},\quad e=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad P=\frac{b^2}{c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 (ㄱ)의 극방정식은 $r=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}\cos\theta}$

왼쪽 모임점을 지나며 AB에 평행인 활줄을 $A'B'$라고 하자.

$A'(r_1,\ \theta)$, $B'(r_2,\ \pi+\theta)$로 놓으면 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$$A'B'=\frac{1}{2-\sqrt{3}\cos\theta}+\frac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}=\frac{4}{4-3\cos^2\theta}=\frac{16}{7}$$

타원의 대칭성으로부터 $AB=\dfrac{16}{7}$

[례3] 타원의 긴축이 $A_1A_2=6$이고 모임점사이의 거리가 $F_1F_2=4\sqrt{2}$이다. 한 모임점을 지나는 직선이 타원과 점 M, N 에서 사귄다. MN의 길이가 타원의 짧은축과 같으면 직선의 경사각은 얼마인가?

(설명) 타원의 왼쪽 모임점 F_1을 극점, 축 F_1A_2를 극축으로 하는 극자리표계를 정하자.

$a=3$, $c=2\sqrt{2}$ 이므로 $b=1$

타원의 극방정식은 $r=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\varphi}$

$$MN=\frac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\varphi}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}\cos\varphi}=\frac{6}{9-8\cos^2\varphi}$$

주어진 조건으로부터 $\dfrac{6}{9-8\cos^2\varphi}=2$, $\cos^2\varphi=\dfrac{3}{4}$

따라서 $\varphi=30^\circ$ 또는 150°

[례4] 포물선 $y^2=2px$의 모임점 F를 지나는 직선이 포물선과 두 점 P, Q에서 사귄다. 선분 PQ의 수직2등분선이 포물선의 대칭축과 R에서 사귈 때 $FR=\dfrac{1}{2}PQ$임을 증명하여라.

(설명) 모임점 F를 극점, 대칭축을 극축(오른쪽 방향)으로 하는 극자리표계를 정하자.

포물선 $y^2=2px$의 극방정식은 $r=\dfrac{\mathrm{P}}{1-\cos\varphi}$

$P(r_1,\ \varphi),\ \ Q(r_2,\ \pi+\varphi)$로 놓으면 $FC=\dfrac{|r_1-r_2|}{2}$

$\mathrm{PQ}=r_1+r_2=\dfrac{2\mathrm{P}}{\sin^2\varphi}$로 놓으면

그러므로

$$\mathrm{FR=FC}\cdot\frac{1}{|\cos\varphi|}=\frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{P}}{1-\cos\varphi}-\frac{\mathrm{P}}{1+\cos\varphi}\right|\cdot\frac{1}{|\cos\varphi|}=\frac{\mathrm{P}}{\sin^2\varphi}$$

$$\therefore\quad FR=\frac{1}{2}PQ$$

[례5] 타원 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ \ (a>b>0)$의 한 모임점 F_1을 지나며 서로 수직인 두 활줄을 AB, CD라고 할 때 다음것을 구하여라.

1) AB+CD의 최소값　　　2) AB·CD의 최소값

3) F_1에 제일 가까운 긴축의 끝점을 E라고 할 때 △ABC의 면적의 최대값

(설명) 타원의 왼쪽 모임점을 극점, 긴축을 극축(오른쪽 방향)으로 하는 극자리표계를 정하자.

$e=\dfrac{c}{a},\quad P=\dfrac{b^2}{c}$이므로 타원의 극방정식은 $r=\dfrac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{c}{a}\cos\varphi}$

즉 $r=\dfrac{b^2}{a-c\cos\varphi}$

$A(r_1,\ \varphi),\ \ B(r_2,\ \pi+\varphi),\ \ C\left(r_3,\ \dfrac{\pi}{2}+\varphi\right),\ D\left(r_4,\ \dfrac{3\pi}{2}+\varphi\right)$로 놓으면

$$\mathrm{AB}=r_1+r_2=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\varphi},\quad \mathrm{CD}=r_3+r_4=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\sin^2\varphi}$$

1) $AB+CD=2ab^2\left(\dfrac{1}{a^2-c^2\cos^2\varphi}+\dfrac{1}{a^2-c^2\sin^2\varphi}\right)=$

$$=\frac{8ab^2(2a^2-c^2)}{4a^4-4a^2c^2+c^4\sin^2 2\varphi}\geq\frac{8ab^2(2a^2-c^2)}{4a^4-4a^2c^2+c^4}=\frac{8ab^2}{2a^2-c^2}=\frac{8ab^2}{a^2+b^2}$$

$\therefore \ \sin^2 2\varphi = 1$

즉 $\varphi = 45°$ 또는 $135°$ 또는 $225°$ 또는 $315°$일 때 갈기식이 성립된다.

그러므로 AB+CD의 최소값은 $\dfrac{8ab^2}{a^2+b^2}$이다.

2) $\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} = \dfrac{16a^2b^4}{4a^4 - 4a^2c^2 + c^4 \sin^2 2\varphi} \geq \dfrac{16a^2b^4}{\left(2a^2 - c^2\right)^2} = \dfrac{16a^2b^4}{\left(a^2+b^2\right)^2}$

$\theta = 45°$ 또는 $135°$ 또는 $225°$ 또는 $315°$일 때 갈기식이 성립한다.

따라서 AB · CD의 최소값은 $\dfrac{16a^2b^4}{\left(a^2+b^2\right)^2}$이다.

3) $\mathrm{EF}_1 = a - c$, E로부터 AB까지의 거리는

$h = \mathrm{EF}_1 - \sin\varphi = (a-c)\sin\varphi$

따라서 $S_{\Delta \mathrm{AEB}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2ab^2}{a^2 - c^2\cos^2\varphi}(a-c)\sin\varphi =$

$$= \frac{ab^2(a-c) \cdot \sin\varphi}{a^2 - c^2 + c^2 \sin^2\varphi}$$

$\sin\varphi > 0$이므로 분자, 분모를 $\sin\varphi$로 나누면

$$S = \frac{ab^2(a-c)}{\dfrac{b^2}{\sin\varphi} + c^2\sin\varphi} \leq \frac{ab^2(a-c)}{2bc} =$$

$$= \frac{ab(a-c)}{2c} = \frac{ab\left(a - \sqrt{a^2-b^2}\right)}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\frac{b^2}{\sin\varphi} = c^2\sin\varphi$$

즉 $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$ 일 때 갈기식이 성립한다.

따라서 △ABE의 면적의 최대값은 $\dfrac{ab\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}{2\sqrt{a^2-b^2}}$이다.

원뿔곡선의 공통적인 성질에 관한 문제

[례1] 원뿔곡선의 모임점을 지나는 활줄들가운데서 대칭축에 수직인 활줄의 길이가 가장 짧다는것을 증명하여라.

(설명) 원뿔곡선의 극방정식 $r=\frac{e\mathrm{P}}{1-e\cos\varphi}$ 이므로 모임점을 지나는 활줄의 길이는 $\mathrm{AB}=\frac{2e\mathrm{P}}{1-e^2\cos^2\varphi}\geq 2e\mathrm{P}$

여기서 갈기표는 φ =90° 일 때 성립한다.

[례2] 원뿔곡선의 모임점 F를 지나는 두 활줄 AB와 CD가 서로 수직일 때 다음것을 증명하여라.

1) $\frac{1}{\mathrm{AB}}+\frac{1}{\mathrm{CD}}$ 은 일정하다. 2) $\frac{1}{\mathrm{FA}}+\frac{1}{\mathrm{FB}}$ 은 일정하다.

(설명) F가 왼쪽 모임점이라고 하여도 일반성은 잃지 않는다.

원뿔곡선의 극방정식은 $r=\frac{e\mathrm{P}}{1-e\cos\varphi}$ 이다.

$\mathrm{A}(r_1,\ \varphi),\ \ \mathrm{B}(r_2,\ \pi+\varphi),\ \ \mathrm{C}\left(r_3,\ \frac{\pi}{2}+\varphi\right),\ \ \mathrm{D}\left(r_4,\ \frac{3\pi}{2}+\varphi\right)$ 라고 하면

$$\mathrm{AB}=\frac{2e\mathrm{P}}{1-e^2\cos^2\varphi},\quad \mathrm{CD}=\frac{2e\mathrm{P}}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

1) $\frac{1}{\mathrm{AB}}+\frac{1}{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2e\mathrm{P}}\left(1-e^2\cos^2\varphi+1-e^2\sin^2\varphi\right)=$

$=\frac{1}{2eP}\left(2-e^2\right)$ (일정)

2) $\frac{1}{\mathrm{FA}}+\frac{1}{\mathrm{FB}}=\frac{1}{e\mathrm{P}}\left(1-e\cos\varphi+1+e\cos\varphi\right)=\frac{2}{eP}$ (일정)

극자리표계에서 자리길방정식에 관한 문제

[례 1] 1) 일정한 점 $\mathrm{A}(r_0,\ \varphi_0)$ 을 지나며 극축과 α 의 각을 이루는 직선의 방정식을 구하여라. (그림 3−59)

2) 중심이 $(r_0,\ \varphi_0)$ 이고 반경이 R인 원둘레의 방정식을 구하여라. (그림 3−60)

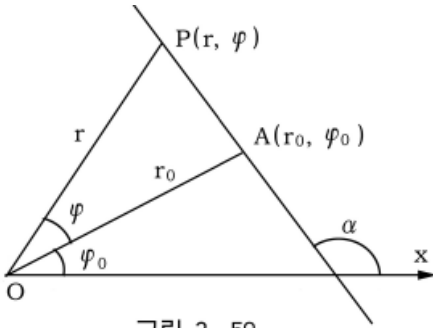



그림 3-59

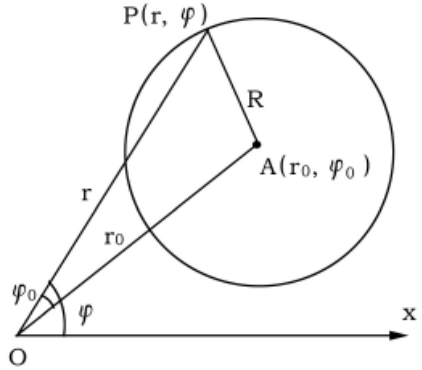



그림 3-60

(설명) 1) 직선의 임의의 점을 P(r_0, φ_0) (A가 아닌)이라고 하면 △AOP에서 시누스정리에 의하여

$$\frac{r}{\sin\left[180° - (\alpha - \varphi_0)\right]} = \frac{r_0}{\sin(\alpha - \varphi)}$$

따라서 직선의 방정식은 $r\sin(\alpha - \varphi) = r_0 \sin(\alpha - \varphi_0)$

2) 원둘레의 임의의 점을 P(r, φ)라고 하면 △AOP에서 코시누스정리에 의하여

$$R^2 = r^2 + r_0^2 - 2r\,r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$

즉 $r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 - R^2 = 0$이 구하려는 원둘레의 방정식이다.

[례2] 1) 극자리표계에서 직선 $\ell : a = r\sin\varphi$ 우에서 한 점 Q가 움직인다. Q를 지나 극축에 수직인 직선을 그어 그 밑점을 M, 극점 O를 지나며 직선 MQ와 사귀는 점을 P라고 할 때 OQ가 ∠MOP의 2등분선으로 된다.

점 P의 자리길방정식을 구하여라. (그림 3-61)

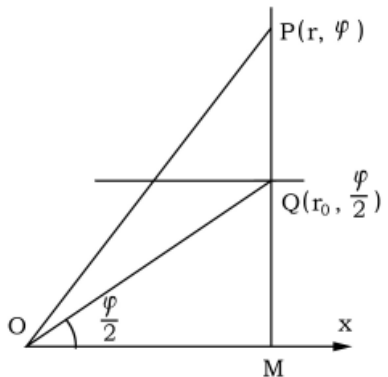



그림 3-61

2) O를 극점으로 하는 원둘레

$r = 2a\cos\varphi\ (a \neq 0)$의 활줄 OA의 연장선우에 OP가 A에 의하여 2 : 3으로 나누이는 점 P를 정한다. 점 P의 자리길방정식을 구하여라. (그림 3−62)

(설명) 1) 움직이는 점을 $P(r,\ \varphi)$라고 하자.

그러면 조건으로부터

$$Q\left(r_0,\ \frac{\varphi}{2}\right),\quad OM = a\cot\frac{\varphi}{2},\quad OM = r\cos\varphi$$

따라서 $r\cos\varphi = a\cot\frac{\varphi}{2}$

이것이 점 P의 자리길방정식이다.

2) $P(r,\ \varphi)$라고 하면 $A\left(\frac{2}{5}r,\ \varphi\right)$

A는 원둘레우의 점이므로 $\frac{2}{5}r = 2a\cos\varphi$

즉 $r = 5a\cos\varphi$

따라서 점 P의 자리길방정식은 $r = 5a\cos\varphi$

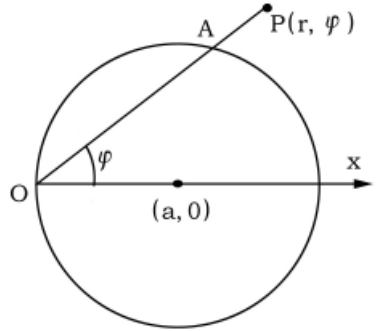



그림 3−62

련습문제

1. 점 (−3, 4)의 극자리표는 (   )이다.

① $\left(5,\ \arctan\frac{4}{3}\right)$ ② $\left(5,\ \arctan\frac{3}{4}\right)$

③ $\left(5,\ -\arctan\frac{4}{3}\right)$ ④ $\left(5,\ \arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$

2. 극자리표계에서 $A(2,\ \arctan 3)$, $A'(-2,\ -\arctan 3)$이면 (   )이다.

① 점 A와 A′는 일치한다.

② 점 A와 A′는 극점에 관하여 대칭이다.

③ 점 A와 A′는 직선 $\varphi = \frac{\pi}{2}$에 관하여 대칭이다.

④ 점 A와 A′는 극축에 관하여 대칭이다.

3. 두 점 $A(r_1,\ \varphi_1)$, $B(r_2,\ \varphi_2)$의 극자리표가 $r_1 + r_2 = 0,\ \ \varphi_1 + \varphi_2 = \pi$

를 만족시키면 두 점 A, B는 (　　)이다.

① 일치　　② 극점에 관하여 대칭

③ 극축에 관하여 대칭　　④ 직선 $\varphi=\frac{\pi}{6}$에 관하여 대칭

4. 곡선 $r=-2\sin\varphi$ 와 $\psi=\frac{\pi}{6}$ (r>0)의 사귐점의 개수는 (　) 이다.

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 4

5. 극방정식이 $r=2a\cos\varphi$ $(a\neq 0)$ 인 도형은 (　　)이다.

① 직선　　② 원점에서 나가는 반직선

③ 극점을 지나며 직선 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 에 관하여 대칭인 원

④ 극점을 지나며 직선 $\varphi=0$ $(r\in R)$ 에 관하여 대칭인 원

6. 원의 극방정식이 $r=5\sqrt{3}\cos\varphi-5\sin\varphi$ 이면 원의 중심은 (　　)이다.

① $\left(\frac{5}{2}\sqrt{3},\ -\frac{5}{2}\right)$　　② $\left(5,\ \frac{2}{3}\pi\right)$

③ $\left(-5,\ \frac{5}{6}\pi\right)$　　④ $\left(-5,\ \frac{2}{5}\pi\right)$

7. 곡선 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ 와 $r=6\sin\varphi$ $(r\in R)$ 의 두 사귐점사이의 거리는 (　　)이다.

① 3　　② $3\sqrt{3}$　　③ 6　　④ 3

8. 극방정식이 $r\cos^2\frac{\varphi}{2}=1$ 인 도형은 (　　)이다.

① 원　　② 타원　　③ 포물선　　④ 쌍곡선

9. 점 A(5, 0)을 지나며 직선 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 에 수직인 직선의 극방정식은 (　　)이다.

① $r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=5$　　② $r\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

③ $r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{2}$　　④ $r\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

10. 극자리표계에서 타원 $r=\frac{2}{2-\cos\varphi}$ 의 왼쪽 준선의 방정식은 (　　)이다.

① $r\cos\varphi=2$　　② $r\cos\varphi=-4$

③ $r\cos\varphi=-2$　　④ $r\cos\varphi=4$

11. 극방정식 $r=\frac{7}{3-a\cos\varphi}$ 이 타원을 나타내면 α의 값범위는 ____ 이다.

12. 극방정식 $r=\frac{1}{3-r\cos\varphi}$ 로 표시되는 쌍곡선의 실축은 ____이고 모임점으로부터 준선까지의 거리는 ____이다.

13. 타원 $r=\frac{6}{2-\cos\varphi}$ 의 긴축은 ____, 짧은 축은 ____, 모임점사이의 거리는 ____이다.

14. 직각자리표계의 원점을 극점, x축을 극축으로 하는 극자리표계에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 의 극방정식은 ____이다.

15. 극자리표계에서 $A\left(-3,\ \frac{4}{3}\pi\right)$, $B\left(5,\ \frac{\pi}{6}\right)$, $O(0,\ \varphi)$일 때 AB＝＝____, △AOB의 면적은 ____이다.

16. $A\left(4,\ \frac{7}{6}\pi\right)$의 극점에 관한 대칭점은 ____ , 극축$(r \in \mathrm{R})$에 관한 대칭점은 ____ , 직선 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $(r \in \mathrm{R})$에 관한 대칭점은 ____ , $\left(4,\ \frac{17}{6}\pi\right)$는 점 A의 ____에 관한 대칭점이다.

17. 직선 $\varphi = \frac{\pi}{6}$와 곡선 $r = \sin\varphi$ $(r \in R)$의 사귐점의 자리표는 ____ 이다.

18. 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$의 왼쪽 모임점을 극점, 중심을 지나는 축을 극축으로 하는 극자리표계에서 이 타원의 극방정식은 ____이다.

19. 극방정식 $(r-3)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ $(r > 0)$이 나타내는 곡선을 그려라.

20. 다음 곡선들의 자리관계를 판정하여라.

① $r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 2$와 $\tan\varphi = 1$

② $r = 3,\ \ r\cos\varphi = 3$

21. 다음의 극방정식을 직각자리표계에서의 방정식으로 고쳐라.

① $r = \frac{1}{4 + 4\cos\varphi}$ ② $r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = a$ $(a > 0)$

③ $r = 2\cos\varphi - 3\sin\varphi$

22. 다음의 방정식을 극방정식으로 고쳐라.

① $x = 0$ ② $y = 0$ ③ $2x - y - 1 = 0$

④ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ ⑤ $y^2 = 4x$ ⑥ $y^2 = \frac{x^3}{2a}$

23. 2차곡선 $r=\dfrac{5}{2-2\cos\varphi}$의 모임점을 지나며 극축과 30°의 각을 이루는 활줄의 길이를 구하여라.

24. 직선 $r=\dfrac{1}{a\cos\varphi+b\sin\varphi}$과 원 $r=2c\cos\varphi$가 서로 접한다. 이때 $b^2c^2+2ac=1 \quad (a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$임을 증명하여라.

25. 쌍곡선의 방정식이 $r=\dfrac{1}{2-2\sqrt{2}\cos\varphi}$이면 이 쌍곡선의 두 점근선사이의 각은 얼마인가?

26. 점 $\mathrm{A}\left(r,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$를 지나는 한 직선이 극축과 $\mathrm{B}(r_1,\ 0)$에서 사귀고 반직선 $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$와 점 $\mathrm{C}\left(r_2,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$ $(r_1>0,\ r_2>0,\ r>0)$에서 사귄다. 이때 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}$임을 증명하여라.

27. 점이 곡선 $4x^2-5xy+4y^2=5$우에서 움직일 때 $w=x^2+y^2$의 최대값과 최소값을 구하여라.

28. 타원 $x^2+2y^2-2x-4y=0$의 왼쪽 모임점을 지나는 한 직선이 타원과 A, B에서 사귄다. 타원의 중심은 O′이다.

① AB의 경사각이 $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}$일 때 AB 및 △O′AB의 면적을 구하여라.

② $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{2}{1}$일 때 AB의 변화률을 구하여라.

29. K의 값의 변화에 따라 극방정식 $r=\dfrac{5}{K^2-4\cos\varphi}$가 나타내는 곡선을 판정하여라.

30. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 중심을 지나 세개의 서로 120° 각을 이루는 반경 OA, OB, OC를 그었다. 이때 $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$의 값을 구하여라.

답

1. ④ 2. ③ 3. ③ 4. ① 5. ④ 6. ①
7. ② 8. ③ 9. ③ 10. ③ 11. $a\in(0,\ 3)$

12. $\dfrac{6}{7},\ \dfrac{1}{4}$ 13. 8, $4\sqrt{3}$, 4

14. $r^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi-a^2\sin^2\varphi}$ 15. $\sqrt{34-15\sqrt{3}},\ \dfrac{15}{4}$

16. $\left(4,\ \dfrac{\pi}{6}\right),\ \left(4,\ \dfrac{5\pi}{6}\right),\ \left(4,\ \dfrac{11\pi}{6}\right),\ \varphi=\pi\ (r>0)$

17. $(0,\ 0),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ 18. $r=\dfrac{9}{4-\sqrt{7}\cos\varphi}$

19. r=3, 또는 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}\ (r>0)$

20. ① 서로 수직으로 사귄다. ② 서로 접한다.

21. ① $y^2=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{8}\right)$ ② $x+\sqrt{3}y-2a=0$

③ $x^2+y^2-2x+3y=0$

22. ① $\varphi=\frac{\pi}{2}\ (r\in \mathrm{R})$ ② $\varphi=0\ (r\in R)$

③ $r=\frac{1}{2\cos\varphi-\sin\varphi}$ ④ $r^2-2r\cos\varphi+4r\sin\varphi+1=0$

⑤ $r\sin^2\varphi=4\cos\varphi$ ⑥ $r\cos^3\varphi=2a\sin^2\varphi$

23. 20

24. 직선의 방정식은 $ax+by-1=0$, 원둘레의 방정식은 $x^2+y^2-2cx=0$ 즉 $(x-c)^2+y^2=c^2$이다. 직선과 원은 서로 접하므로 원의 중심 (c, 0)으로부터 직선까지의 거리는 원의 반경과 같다.

즉 $\frac{|ac-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=c$. 간단히 하면 $b^2c^2+2ac=1$

25. 90°

26. 그림 3−63에서 보는바와 같이 $S_{\Delta AOC}+S_{\Delta AOB}=S_{\Delta BOC}$이다.

$\therefore\ r_2r\sin\frac{\pi}{3}+rr_1\sin\frac{\pi}{3}=r_1r_2\sin\frac{2}{3}\pi$

즉 $r_2r+r_1r=r_1r_2$

따라서 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}$

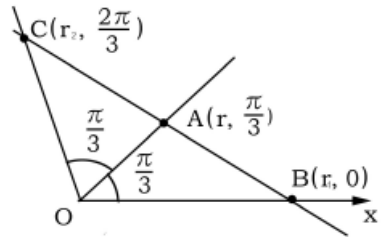



그림 3−63

27. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$로 놓고

방정식을 변형하면 $r^2=\frac{10}{8-5\sin 2\varphi}$, $w=x^2+y^2=r^2$

$\sin 2\varphi=1$일 때 w의 최대값은 $\frac{10}{3}$, $\sin 2\varphi=-1$일 때 w의 최소값은 $\frac{10}{13}$이다.

28. 타원의 방정식은 $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{\frac{3}{2}}=1$

타원의 왼쪽 모임점을 극점, 중심 O′를 지나는 직선을 극축으로 하는 극자리표계에서 타원의 극방정식은 $r=\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}\cos\varphi}$

① $\varphi = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서 $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{4-2\cos^2\varphi} = \frac{10}{9}\sqrt{3}$

$$S_{\Delta O'AB} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot c\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

② $\mathrm{A}(r_1,\ \varphi_1)$, $\mathrm{B}(r_2,\ \pi+\varphi_1)$라고 하자.

$$\frac{AF}{BF} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{1} \text{ 또는 } \frac{AF}{BF} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{1}$$

그러므로 $\frac{2+\sqrt{2}\cos\varphi}{2-\sqrt{2}\cos\varphi} = \frac{2}{1}$ 또는 $\frac{2-\sqrt{2}\cos\varphi}{2+\sqrt{2}\cos\varphi} = \frac{2}{1}$

즉 $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\mathrm{K}_1 = \frac{\sqrt{14}}{2}$ 또는 $\mathrm{K}_2 = -\frac{\sqrt{14}}{2}$

29. 1) K=0일 때 방정식은 $-4r\cos\varphi = 5$
즉 $-4x = 5$ 이것은 y축에 평행인 직선이다.

2) K≠0일 때 방정식 $r = \dfrac{\frac{5}{\mathrm{K}^2}}{1-\frac{4}{\mathrm{K}^2}\cos\varphi}$

① $\frac{4}{\mathrm{K}^2} > 1$ 즉 $\mathrm{K}\in(-2,\ 0)\cup(0,\ 2)$일 때 쌍곡선이다.

② $\frac{4}{\mathrm{K}^2} < 1$ 즉 $\mathrm{K}\in(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)$일 때 타원이다.

③ $\frac{4}{\mathrm{K}^2} = 1$ 즉 $\mathrm{K}\pm2$일 때 포물선이다.

30. 원점을 극점, x축을 극축으로 하는 극자리표계에서 타원의 방정식은 $r^2 = \dfrac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}$ 이다.

$\mathrm{A}(r_1,\ \varphi)$ $\mathrm{B}(r_2,\ \varphi+120°)$, $\mathrm{C}(r_3,\ \varphi+240°)$ 으로 놓으면

$$\frac{1}{\mathrm{OA}^2}+\frac{1}{\mathrm{OB}^2}+\frac{1}{\mathrm{OC}^2}=$$

$$=\frac{1}{a^2b^2}\Big[b^2\cos^2\varphi+b^2\cos^2(\varphi+120°)+b^2\cos^2(\varphi+120°)+$$

$$+a^2\sin^2(\varphi+120°)+a^2\sin^2(\varphi+240°)\Big]$$

$$\cos^2\varphi+\cos^2(\varphi+120°)+\cos^2(\varphi+240°)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[1+\cos2\varphi+1+\cos(2\varphi+240°)+1+\cos(2\varphi+480°)\Big]=\frac{3}{2}$$

$$\sin^2\varphi+\sin^2(\varphi+120°)+\sin^2(\varphi+240°)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big[1-\cos2\varphi+1-\cos(2\varphi+240°)+1-\cos(2\varphi+480°)\Big]=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ \ \frac{1}{\mathrm{OA}^2}+\frac{1}{\mathrm{OB}^2}+\frac{1}{\mathrm{OC}^2}=\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{3}{2}b^2+\frac{3}{2}a^2\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

학생수학전서(3)

집 필 윤두성, 박무환, 정영춘, 김은심,
최정철, 김영재, 리귀숙, 최향실

심 사 김광연

편 집 김영섭 장 정 손명희

콤퓨터편성 김영춘 교 정 박명희

낸 곳 금 성 청 년 출 판 사

인쇄소 평 양 종 합 인 쇄 공 장

인 쇄 주체100(2011)년 4월 20일

발 행 주체100(2011)년 4월 25일

ㄱ-17139ㄴ 값 220원